Análise Psicológica (1998), 2 (XVI): 301-319

Aprendizagem da matemática: Proposta de avaliação de dificuldades específicas na adição e subtracção no 1.º Ciclo do Ensino Básico (*)

ANA MARIA BAPTISTA ALMEIDA (**)
LEANDRO S. ALMEIDA (**)

É substancial o número de crianças e jovens marcados, em termos de rendimento escolar, por dificuldades na matemática. Para além da percepção de uma certa irreversibilidade destas dificuldades com o avançar na escolaridade, certo é que estes alunos tendem mais precocemente a abandonar a escola e/ou a terem um leque menor de opções vocacionais, facto que é agravado pelas características da sociedade actual, industrializada e em permanente inovação tecnológica. Acresce ainda que, fazendo a matemática parte da formação geral do cidadão, tais dificuldades e problemas associados devem merecer uma maior atenção de todos os que actuam na Educação.

A preocupação da psicologia, e mais concretamente da psicologia da aprendizagem e do desenvolvimento, com as dificuldades escolares dos alunos não é recente. Contudo, os instrumentos usados na sua caracterização nem sempre se têm revelado os mais adequados. Testes de inteligência permanecem usados na busca inglória de uma análise discriminativa e compreensiva de tais dificuldades. Cada vez mais os psicólogos procuram nas tarefas e metodologias curriculares uma explicação mais próxima dessas dificuldades.

A certeza de que tais dificuldades na matemática podem emergir e cristalizar-se logo na Escola Básica, influenciou a opção por centrar o nosso trabalho nas primeiras aquisições inerentes ao conhecimento aritmético (as operações mais elementares: adição e subtracção), e por o efectuar com crianças do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Em termos teóricos de fundamentação consideramos três das teorias psicológicas que se destacam no estudo da aprendizagem e com maior impacto no ensino-aprendizagem da matemática: teoria psicogenética de Piaget, teoria cognitiva e teoria só-

(*) Artigo baseado na Tese de Mestrado da primeira autora sob orientação do segundo autor.

Investigação integrada no projecto «Cognição e Aprendizagem» do CEEP – UM. A correspondência relativa a este artigo deve ser enviada para o segundo autor: Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 4710 Braga.

(**) Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia, Campus de Gualtar, 4710 Braga.

cio-histórica (apresentação mais exaustiva em trabalho anterior – cf. A. Almeida, 1997).

A *teoria psicogenética* defende que conhecer, mais do que da mera percepção de atributos pelos orgãos dos sentidos, decorre das acções. A experiência é, pois, a base da construção das estruturas, as quais são progressivamente redefenidas face à percepção das novas experiências que não são passíveis de serem compreendidas pelas primeiras. Este processo de aproximação do indivíduo a um conhecimento mais consonante com a realidade (Sinclair, 1987), que se traduz no progressivo aparecimento de novos modelos mais complexos e eficazes, é também facultada pela interiorização de factos normativos como evidências naturais.

A aprendizagem é, assim, um processo de construção interno (individual), distinto de uma simples acumulação de experiências, dado que o indivíduo só é sensível a um estímulo se possuir os esquemas necessários à sua assimilação. A diferença de oportunidades em experienciar justifica, desta forma, as clivagens inter-individuais relativas ao momento em que se estruturam os conhecimentos (aprendizagens), pelo que a aprendizagem depende do nível de desenvolvimento do indivíduo e dos instrumentos de coordenação das acções correspondentes a esse nível.

O pensamento lógico-matemático surge da *abstracção reflexiva*, com origem nos esquemas de acção constituidos sobre as acções (operações), executáveis sobre objectos muito diversos. Entre essas destacam-se as acções de *combinar* e de *ordenar* percursoras da construção do conceito de número, o qual é uma abstracção que representa um conjunto de unidades equivalentes entre si, de acordo com os «*predicados*» em causa, e que se constitui através de uma relação de *enumeração*. As acções de combinar ao proporcionarem a construção da estrutura lógica de classificação, vêm a possibilitar a concretização da relação simétrica de selecção dos objectos a considerar no processo de contagem. Quanto às acções de ordenar, uma vez que facultam a construção da estrutura lógica de classificação, vêm a permitir a realização da relação assimétrica de ordenação dos objectos (um após outro) e das palavras que designam as quantidades.

Quantificar exige, ainda, a compreensão do aspecto *cardinal* do número, o qual resulta de várias relações percebidas, mas cujo julgamento ultrapassa os dados fornecidos pela percepção, isto é, implica a aquisição da invariância numérica (Rangel, 1992).

No que concerne à leitura e escrita de números, infere-se da teoria que a representação por símbolos ou signos só acontece após a construção da noção de número por abstracção reflexiva. Sendo o signo um significante convencional (sem semelhanças com a coisa que é representada), ele é, forçosamente, adquirido por transmissão social.

Algumas das dificuldades na aprendizagem dos números são, no âmbito desta concepção teórica, atribuíveis a características específicas do sistema numérico como a falta de correspondência directa entre a contagem falada e o sistema escrito arábico-hindu, e às diferenças entre as regras da escrita alfabética a dos algarismos ideográficos (embora ambos os sistemas possam representar palavras passíveis de serem lidas). A escrita de números não é apenas uma técnica, já que, induvitavelmente, envolve também o raciocínio. Mais explicitamente, o sistema numérico escrito com base décimal exige a concepção de «1» (conjunto de «10») como igual a «10» unidades, bem como proceder à construção hierárquica em dois ou mais níveis, implicando a estrutura hierárquica de inclusão, bem como a reversibilidade, isto é, a concepção de número operatório.

Esta concepção de número operatório tem implícita a de invariância da quantidade total, qualquer que seja a transformação efectuada na organização dos elementos em causa (referimonos aos elementos unitários de contagem que, apesar de poderem ser distintos entre si são assumidos como equivalentes), bem como a concepção de inclusão hierárquica do número e a de reversibilidade, o que permite a decomposição e a inversão das operações.

Na concepção psicogenética a génese da aritmética encontra-se no cálculo de classes, com as suas três operações fundamentais (reunião, intersecção e complementaridade). A adição entre dois números exige a representação mental do conjunto relativo à primeira parcela, depois a representação mental do conjunto relativo à segunda parcela e, por fim, a reunião mental de todos os elementos no mesmo conjunto (soma), no qual os dois primeiros desaparecem num sentido, mas continuam a existir no sentido inverso. A incapacidade, até dada altura do desenvolvimento, para coordenar a relação *parte-todo* entre os conjuntos leva as crianças, como recurso, a transformar todos os elementos em unidades (procedendo à *contagem de todos*).

Uma vez que a assimilação se faz de acordo com o conhecimento já construído, a recuperação dos dados memorizados torna-se mais fácil quando se faz recurso a uma rede de relações coerente que os integre. Neste sentido, se a realização de operações repetidas decorrer de situações do quotidiano, levando sistematicamente a abstracções que geram o estabelecimento de relações, a sua memorização ocorrerá implicitamente. A produção de erros «típicos» encontra-se fortemente associada à memorização de factos de adição que não é efectuada de forma integrada.

O facto do número apenas ser concebido como invariante aos 7-8 anos impõe que a aplicação da propriedade comutativa da adição só se efectue posteriormente. O mesmo se passa relativamente à partição de conjuntos de modos distintos, uma vez que apela a várias relações construídas e à compensação para que se conceba a sua equivalência. Só nesta altura se assiste ao recurso à operacionalização com base em combinações memorizadas, ou seja a derivações dessas. Quanto à subtracção, ela surge apenas após o conhecimento da adição (operação inversa) que lhe corresponde.

A forma escrita das operações, as equações matemáticas, diferem muito das frases da escrita alfabética. Representam relações e os seus elementos são ideográficos. A sua execução implica a construção de uma relação hierárquica entre os elementos em causa e o conhecimento do modo de a representar através do código escrito convencional (relação mais difícil de estabelecer do que a inerente à dedução do resultado).

No que concerne ao algorítmo, ele é um truque que possibilita a simplificação duma operação através da dissociação da soma de cada coluna, efectuando-a per si. Porém, em geral a criança executa-o sem o entender (por automatização de comportamento), não o fundamentando na concepção de valor posicional.

Atenda-se que os problemas com enunciado são passíveis de ser resolvidos com êxito por crianças sem instrução formal, sobretudo quando extraídos de situações do quotidiano das crianças. Segundo os resultados de diversos estudos (cf. Bergeron & Hercovics, 1990; Fuson, 1992), mais do que com a aritmética, as dificuldades na resolução prendem-se com a relação *parte-todo*. Porém, embora a escrita das operações correspondentes constitua um precioso auxiliar para os adultos, não o é para as crianças. No sentido de obterem uma resposta (resultado), as crianças primeiro pensam e actuam mentalmente, sem reflectirem sobre o processo por forma a serem capazes de o explicar. Numa primeira fase, quando procedem à representação da operação, servem-se das suas próprias palavras e de símbolos pessoais. Só mais tarde adoptam os sinais e as regras convencionais.

A *teoria cognitiva*, mais concretamente o modelo do processamento de informação, defende que o conhecimento se integra (ou acumula) na mente em estruturas simbólicas que se criam, usam e monitorizam através dos processos mentais. Processos esses que estão limitados às fronteiras definidas pelas características da memória humana. Assim, deve-se à organização dos esquemas da informação na memória a longo prazo (que se reportam às propriedades do conceito ou situação que representam), bem como às redes de operações estruturadas, o tipo e a velocidade da evocação e de processamento da informação (execução das operações mentais a cumprir na memória de trabalho) necessários à resposta induzida pela percepção de um dado estímulo do meio (na memória sensorial).

A aprendizagem, concebida como o processo de integração de novos conhecimentos em estruturas mentais, reporta-se aqui a uma modificação de qualquer componente do sistema de processamento da informação, ou seja, a uma adição ou alteração nos dados das estruturas ou nas redes de operações que compõem os *sistemas de produção* de respostas. Para que a integração se efectue de forma significativa, as aquisições progressivas de competências na área da matemática (à semelhança de outras) deverão ser efectuadas segundo a hierarquia (com base lógica ou ontológica) da ordem *geral* do seu desenvolvimento. Deste modo, ao estimular o desenvolvimento das competências mais básicas na área, criam-se as condições para o posterior aumento ou modificação dos mecanismos no sentido desejado. A mestria propicia também, segundo alguns autores (Oers, 1990), a *automatização* de competências ou *compilação do conhecimento*, a qual viabiliza o desenvolvimento de uma compreensão mais vasta e profunda.

A análise racional das tarefas reveste-se de particular importância para os teóricos desta corrente, na medida em que permite subdividir um dado comportamento (relevante) nas suas diferentes componentes de competências (mais ou menos gerais), tornando possível quer a apresentação sequencial e integrada das mesmas às crianças, quer a detecção da(s) fase(s) do processo da sua execução que determina(m) o(s) presumíveis erro(s). A qualidade da aprendizagem: *significativa ou compreendida/mecânica ou memorizada* decorre, por conseguinte, do processo de instrução proporcionado (Tavares & Alarcão, 1989).

Influenciada pelas ideias e conclusões da escola de Geneve (psicogenética), da qual adoptou a concepção de *integração construtiva*, a *teoria sócio-histórica* sobre a forma de aquisição de conhecimentos aplicada à matemática propícia uma compreensão plausível de aspectos inerentes à sua compreensão (Lompscher, 1994). Segundo esta teoria, o conhecimento está associado às competências de acção culturalmente aceitáveis (quer de acções sobre objectos, quer de acções mentais), as quais possibilitam a integração do indivíduo na sociedade.

Pela interacção social processa-se a «*aculturação*», ou seja, o conhecimento das condições e dos objectos desenvolvidos pela e para a actividade por gerações antecedentes, bem como se criam e recriam as bases naturais e sociais da existência. A cultura funciona como um limite estruturante no desenvolvimento da mente humana, proporcionando factores semióticos que permitem aceder a níveis de conhecimento de maior complexidade. Mas, porque a aquisição de conhecimentos (funções intra-psíquicas), embora decorra de funções inter-psíquicas, é, em última análise, um processo de construção individual, tornam-se plausíveis diferenças inter-individuais (até porque as experiências culturais variam de indivíduo para indivíduo).

A aprendizagem, nesta concepção, consiste numa melhoria qualitativa no reportório de acções, bem como das componentes de cada acção (orientação, execução e avaliação). Essa melhoria pode ser «*microgenética*», ou seja, incidir apenas numa parte da acção, ou ocorrer pela «extensão» do reportório, isto é, por adição ao mesmo de acções válidas.

Quanto à matemática, ela é vista como um tipo de actividade humana desenvolvida culturalmente e orientada por regras construídas pelos investigadores da área, podendo ser caracterizada como a resolução de problemas por esquematização. Nesse sentido, o processo de construção individual da mesma requer uma acção idêntica à desses, pelo que deverá ser permitido aos alunos o uso da intuição, a repetição e a construção, além da aquisição dos aspectos de formalização e de dedução, partindo-se de uma situação-problema.

Neste artigo apresentamos as provas construídas para os dois níveis de escolaridade e os resultados da sua aplicação a uma amostra de crianças do 2.º e 4.º ano de escolaridade.

1. METODOLOGIA

1.1. *Amostra*

Para a construção e validação das provas construídas para este estudo foram utilizados diversos grupos de crianças. Neste artigo remetemo-nos para a amostra de crianças avaliadas na versão final. A prova de nível 1 foi realizada por 28 crianças com idades compreendidas entre os 6 e os 10 anos, sendo 18 rapazes e 10 raparigas, retirados aleatóriamente de 5 turmas das 4 escolas do distrito do Porto que colaboraram neste estudo. Quanto à prova de nível 2, realizaram-na 26 crianças de ambos os sexos (equitativamente) com idades compreendidas entre os 8 e os 10 anos, seleccionadas aleatoriamente em 3 turmas das 4 escolas anteriores.

1.2. *Instrumento*

Construiram-se duas provas com vista à avaliação de conhecimentos e destrezas ao nível do cálculo (adição e subtracção), bem como de alguns dos seus requesitos prévios. A clivagem aos 7-10 anos nas competências de realização relativa ao nível de desenvolvimento legitima que, a partir da construção inicial de uma prova (que se revelou demasiado extensa), se tenham elaborado duas provas com itens distintos.

Assim, a *prova de nível 1* é composta por sete formas usuais de apresentação das situações de adição e de subtracção: i) Problemas com enunciado (13 itens); ii) Operações-Apresentação icónica (5 itens); iii) Escrita de números, com mais do que um dígito, através de algarismos (4 itens); iv) Exercícios «tipo» de adição e de subtracção (raciocínio mental) (5 itens); v) Preenchimento de lacunas (apresentação horizontal) (4 itens); vi) Exercícios «tipo» de adição e de subtracção (algorítmos) (5 itens); e vii) Preenchimento de lacunas (algorítmos) (4 itens). A *prova de nível 2* compõe-se por quatro das rúbricas que compõem a primeira: i) Problemas com enunciado (12 itens); ii) Escrita de números, com mais do que um dígito, através de algarismos (4 itens); iii) Exercícios «tipo» de adição e de subtracção (raciocínio mental) (12 itens); iv) Exercícios «tipo» de adição e de subtracção (algorítmos) (7 itens).

Com o estudo baseado nestas provas foi nosso propósito confirmar alguns dos aspectos identificados em diversos estudos relatados pela literatura. Assim, no que se refere à resolução de problemas com enunciado os estudos sugerem que as crianças mais jovens: a) são capazes de resolver os problemas com enunciado mais simples, recorrendo preferencialmente ao seu conhecimento aritmético informal; b) efectuam (com maior evidência do que nas mais velhas) a escolha do processo a usar, bem como das estratégias de resolução a adoptar, de acordo com as características do enunciado do problema relacionadas com a sua estrutura semântica e de sintaxe e o lugar de referência às quantidades maiores e menores no mesmo, além, obviamente do tipo de operação implicada; c) optam mais comumente por estratégias de contagem diversas, consistentes com o tipo de problema em causa; d) adoptam, sobretudo, estratégias de contagem que implicam o recurso a objectos observáveis; e) revelam dificuldades na tradução da linguagem oral para a escrita matemática (dado não dominarem ainda o sistema em causa).

No que concerne aos problemas apresentados na forma icónica, inseridos apenas na prova de nível 1, previa-se maior facilidade na resolução destes do que na dos problemas com enunciado e na dos exercícios «tipo» de adição e de subtracção, sendo os «erros» de contagem mais frequentes quando é adoptada a forma de contagem visual. Se as crianças dominam ineficientemente a relação valor/posição dos algarísmos de um número de multi-unidades, tenderão a alterar frequentemente a ordem dos mesmos ou a acrescentar algarísmos que violam a relação significado/ /significante, no processo de operacionalização mental e/ou escrito das operações.

1.3. *Procedimentos*

A aplicação das provas foi sempre precedida pela realização de todas as deligências junto de professores e pais, necessárias à *formalização* e à implementação, de forma sequencial e organizada, do estudo. A duração das aplicações para ambas as provas variou entre 40 a 70 minutos, incluindo-se nesta as necessárias pausas de 10 minutos (cerca de duas para as provas de nível 1 e uma nas provas de nível 2). As pausas ocorreram em momentos diversos, de acordo com a expressão de cansaço pela criança ou pela percepção do mesmo pelo «entrevistador».

O registo da exactidão das respostas, bem como das inferências realizadas ao longo do processo de realização de cada item (com base na observação e nas respostas às várias questões colocadas), foi efectuado durante as aplicações nas «folhas de registo» concebidas para o efeito.

1.4. *Resultados*

A apresentação dos resultados é feita separadamente para as provas de nível 1 e de nível 2, estabelecendo algumas comparações entre os dois grupos sobre resultados de provas similares (apresentação mais exaustiva em A. Almeida, 1997).

Provas de Nível 1

As proporções do tipo de instrução (caracterizado pelos meios auxiliares facultados e por uma ajuda progressivamente maior) necessária à execução dos *problemas com enunciado* (A. Almeida, 1997) distintos, sobretudo, pela sua classificação semântica, podem ser consultadas no Quadro 1. Os dados encontrados são consonantes com os diversos estudos (cf. Carpenter &

QUADRO 1

Problemas com enunciado*: proporção do tipo de instrução exigida para a execução do problema.*

Itens		Instrução					
	Classificação semântica	1º Tipo	2º Tipo	3º Tipo	4º Tipo	5º Tipo	N. R.
Probl-a	Alterar-reunindo (em que a situação final é desconhecida)	.89	.07	.04	—	—	—
Probl-b	Alterar-separando (em que a situação final é desconhecida)	.92	.04	.04	—	—	—
Probl-c	Alterar-reunindo (em duas etapas)	.88	.04	.04	.00	.04	—
Probl-d	Combinar (reunião)	.89	.00	.07	.00	.04	—
Probl-e	Combinar (disjunção)	.36	.14	.11	.25	.14	—
Probl-f	Comparar (com a quantidade de diferença desconhecida e a quantidade comparada B menor do que a de referência A)	.50	.11	.00	.07	.32	—
Probl-g	Comparar (com a quantidade de diferença desconhecida e a quantidade comparada B maior do que a de referência A)	.46	.00	.07	.07	.36	.04
Probl-h	Comparar (com a quantidade comparada B desconhecida e maior do que a de referência A)	.54	.18	.00	.04	.14	.10
Probl-i	Comparar (com quantidade comparada B desconhecida e menor do que a de referência A)	.68	.07	.04	.04	.07	.10
[redacted]							
Probl-k	Alterar-reunindo (em que a situação intermédia é desconhecida)	.46	.00	.10	.04	.25	.15
Probl-l	Alterar-separando (em que a situação intermédia é desconhecida)	.25	.39	.07	.10	.04	.15
Probl-m	Igualar (alterar-reunindo)	.50	.18	.07	.04	.07	.14

Moser, 1983; Nieto e colaboradores, 1994) que concluem maior facilidade na resolução dos problemas dinâmicos (*alterar*), para os quais a tradução linear do enunciado na expressão matemática correspondente é uma estratégia eficiente, nomeadamente para o probl-a, probl-b e probl-c. Os dados apontam também para a possibilidade da situação proposta pelo enunciado não constituir uma variável neutra em termos de realização, sugerindo inclusivé que a maior *familiaridade* da criança com a situação facilita a descoberta de um processo de resolução adequado. A presença de «*palavras-chave*» nos enunciados, como «*mais*» e «*menos*», parece constituir, de alguma forma, elementos determinantes na selecção das operações a realizar, induzindo, muitas vezes, ao «erro».

A necessidade de recurso à concretização (materialização) das operações a efectuar, por algumas crianças, surgiu associada, sobretudo, à localização da incógnita (nos problemas de alterar em que a situação intermédia não era conhecida) e nos problemas estáticos (provavelmente decorrente das dificuldades de representação das situações em causa).

Das dificuldades identificadas na resolução dos problemas, a mais expressiva foi a de *entender/representar* o problema. Contudo raramente foi verificada nos quatro primeiros itens deste grupo (problemas de alterar na forma canónica e problema de combinar que remete para a conjunção de conjuntos). Quanto ao tipo de estratégias de manipulação de dedos e/ou objectos («separar de…» ou «adicionar a…»), quando adoptadas para a resolução dos problemas de subtração parece estar associado a características do texto do enunciado. Por último, mais de metade das crianças não concebia a possibilidade da resposta ao problema se encontrar entre os dados do mesmo, o que seguramente constitui uma situação não frequente nem trabalhada no quotidiano das suas aprendizagens escolares.

Nas operações com *apresentação icónica* (preenchimento de *espaços em branco* em equações convencionais), a maioria das crianças respondeu acertadamente aos itens 1, 3 e 5, e errou os itens 2 e 4 (cf. Quadro 2). Este facto prende-se, nitidamente, com uma dificuldade na descodificação da representação icónica adoptada. Deste modo, embora as características destes dois itens (2 e 4) sejam próximas das representações propostas pelos manuais académicos, os resultados indiciam tratar-se de uma forma *simbólica* pouco *natural* e, por conseguinte, de mais difícil compreensão pelas crianças deste nível.

Refira-se que os alunos privilegiaram a estratégia de contagem com «*acto indicador*» em relação aos elementos (estrelas) dos conjuntos em causa, em detrimento da contagem «*visual*», o que ocorreu de modo mais evidente nos itens com maior número de elementos. Nos itens **1** e **5**, .21 e .36 dos alunos, respectivamente, prescindiram do «*acto indicador*». Esses elementos (estrelas) foram assumidos, no acto de construção da prova, como representações plausíveis de *unidades perceptivas*, de acordo com a designação de Fuson (1992).

De salientar, no que concerne ao item **3**, .37 dos alunos inverteram a ordem dos termos apresentada após contagem do número de elementos inerentes ao problema, optando por uma estratégia de economia no procedimento para a resolução.

A análise do Quadro 2 permite concluir que, face ao tipo de problemas propostos, as estratégias preferencialmente usadas pelas crianças foram as inerentes à contagem verbal. Dentre essas, foi maioritariamente utilizada a de contagem «*crescente a partir de …*» para os problemas de somar, e a de contagem «*decrescente a partir de…*» para os problemas de subtrair. A estratégia *mental de evocação directa* foi mais utilizada nos itens **1** e **5**, duas situações que envolvem números (quantidades) *perceptivas* e, por conseguinte (*cf.* teoria psicogenética) mais fáceis de memorizar as composições e decomposições dos mesmos.

O Quadro 3 mostra a dificuldade revelada por algumas das crianças em escreverem números ditados de três dígitos, sendo o item **d** (o qual envolve uma posição intermédia sem valor e, consequentemente, a escrita do dígito «0») aquele em que se verificou maior proporção de «erros». Realce-se que à maioria destas crianças não tinha sido ainda ensinada a escrita de números com valores superiores a «100», o que justifica parte das omissões. Saliente-se, ainda, o facto de entre as crianças que erraram uma ou mais vezes a tradução das expressões numéricas da expressão oral para a escrita simbólica matemática, apenas três foram bem sucedidas na represen-

QUADRO 2
Problemas na forma icónica*: Índice de dificuldade e proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens				
	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5
Índice de Dificuldade	1,00	.04	.93	.04	.89
Estratégias de Contagem					
Manipulação dos dados e/ou objectos:		.07			
-Adicionar a …		.07			
Contagem verbal:	.75	.86	.89	.82	.64
-Crescente de todos os elementos	.32		.26		
-Crescente, a partir de …	.43	.04	.63	.04	.04
-Crescente até …		.11		.11	.07
-Decrescente a partir de …		.60		.60	.43
-Decrescente até…		.11		.07	.11
Estratégia mental:	.25	.07	.11	.18	.32
-Evocação directa	.25	.07	.04	.11	.32
-Derivação das propriedades dos números			.07	.07	

QUADRO 3

Escrita de números através de algarismos*: proporção de tipos de resposta*

Itens	Respostas		
	Acertos	Erros	Omissões
a) «36+42»	.93	.07	—
b) «34-20»	.85	.15	—
c) «632-24»	.61	.18	.21
d) «406-333»	.54	.21	.25

QUADRO 4

Exercícios «tipo» – «raciocínio mental»*: Índice de dificuldade e proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens				
	Item a «5+7=?»	Item b «14+12=?»	Item c «8-2=?»	Item d «24-11=?»	Item e «14-21=?»
Índice de Dificuldade	.92	.89	.89	.64	.21
Estratégias de Contagem					
Manipulação dos dedos e/ou objectos:	.53	.21	.46	.18	
Contagem verbal:	.28	.14	.15	.25	
-Crescente, a partir de …	.28	.14			
-Crescente até …			.04	.04	
-Decrescente a partir de …			.11	.21	
Estratégia mental:	.14	.21	.32	.18	
-Evocação directa	.07	.21	.32	.14	
-Derivação das propriedades dos números	.07	—	—	.04	
Combinação de duas ou mais estratégias	—	.39	—	.21	

tação dos enunciados dos problemas pela expressão matemática correspondente.

Nos exercícios que designámos de «*raciocínio mental*», poucas crianças falharam a resolução das três primeiras operações propostas pela prova (Quadro 4). A subtracção, sem empréstimo (item **d**), que envolvia dois números de dois dígitos cada, foi realizada com êxito por .64 dos sujeitos da amostra. Relativamente ao item **e**, só .21 das crianças concluiram tratar-se de uma operação impossível entre números naturais. Porém, .21 entre as restantes inverteram a ordem dos números, tornando-a numa operação viável.

De referir ainda que, relativamente ao item **a**, .30 das crianças alteraram a ordem dos números na sua resolução (optando por uma estratégia de *economia* no processo), assim como .17 utilizaram a estratégia aditiva indirecta no item **d** (altamente difundida no contexto escolar).

Neste caso, dos exercícios «tipo» de adição e de subtracção (raciocínio mental), as crianças optaram maioritariamente (Quadro 4) por estratégias que implicavam o recurso à representação concreta das operações (sobretudo a contagem pelos dedos) ou a uma *mescla* dessas com outras (classificadas como *combinação de duas ou mais estratégias*). A estratégia *mental*, dita de evocação *directa*, foi também bastante utilizada, sugerindo a sequente memorização pelas crianças dos resultados das adições de números pequenos. Algumas crianças procederam mesmo à derivação das *propriedades dos números memorizadas*. Nas subtracções (itens **c** e **d**) a estratégia verbal mais utilizada foi a «*decrescente a partir de…*» Apenas uma das crianças usou a estratégia de «*contagem crescente até…*»

Dentre as situações propostas referentes aos exercícios *«tipo» de adição e de subtracção-algorítmo* (Quadro 5), a situação e foi a que se revelou de mais fácil resolução. Saliente-se, porém que, apesar de se tratar duma subtracção entre dois números de três algarísmos cada, não envolvia empréstimo, podendo ser subdividida parcelarmente em três pequenas subtracções (independentes), bastando para tal respeitar para o resultado final a ordem de apresentação de cada uma.

Os itens **a** e **d** foram os que originaram maior proporção de erro. Nestes dois casos de adição, as parcelas não são constituídas por números com igual quantidade de algarismos e, em ambas, um dos algarismos de um dos números é o «0» (elemento neutro da adição), com o qual muitas crianças revelam dificuldades em operar. Diversas crianças erraram a execução do algorítmo **c**, quer porque consideraram duas vezes o «1» relativo às dezenas, ou seja, realizaram a operação como se se tratasse de: «1 (12) - 3», quer porque inverteram a ordem dos algarismos relativos às unidades, obtendo, neste último caso, como resultado «11». Estes dados relativos à subtracção indicam que a maioria das crianças avaliadas conhecia e aplicava (por vezes abusivamente, uma vez que, considerava o valor de cada dígito *per si*, em detrimento da quantidade total) a regra relativa à subtracção entre números naturais de que o valor do *aditivo tem necessariamente de ser maior do que o do subtractivo*. O item **b**, subtracção impossível, só foi identificado como tal por duas crianças. Porém, .76 das restantes inverteram a ordem dos termos, viabilizando a operação. De referir que a resolução das operações aritméticas através de algorítmos ainda não tinha sido ensinada a três das crianças.

Relativamente às estratégias de contagem utilizadas (Quadro 5), verificou-se o recurso maioritário às estratégias mentais nos itens **a** (adição em que um dos termos é o número «10») e **d** (adição em que os algarismos em causa são o «3» e o «0» e que pode ser dividida em três adições: 3+0; 3+3 (dobro); e 3+0). As estratégias verbais foram usadas, sobretudo, nos itens relativos à subtracção: **c** e **e**. Dentre este tipo de estratégias, as crianças recorreram principalmente à «*contagem decrescente a partir de…*», sendo o segundo tipo de contagem verbal mais usado a «*contagem crescente até…*».

Diversas crianças escusaram-se a resolver os itens relativos ao preenchimento de lacunas, quer no que concerne à apresentação horizontal

QUADRO 5

Exercícios «tipo» – algorítmos*: Proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens				
	Item a 10 +8	Item b 14 -17	Item c 12 - 3	Item d 333 +30	Item e 599 -213
Índice de Dificuldade	.68	.07	.68	.61	.75
Estratégias de Contagem					
Contagem verbal	.48		.78	.35	.83
-Crescente, a partir de …	.48			.35	
-Crescente até …			.13		.22
-Decrescente a partir de …			.61		.57
-Decrescente até…			.04		.04
Estratégia mental	.52		.21	.65	.17
-Evocação directa	.52		.17	.61	.13
-Derivação das propriedades dos números	—		.04	.04	.04

das operações, quer sob a forma de algorítmo (Quadros 6 e 7), alegando nunca se terem confrontado com situações similares. Esta situação não prevista inicialmente na fase de construção da prova em que fomos apoiados por professores, permite-nos apontar a grande diversidade de estratégias usadas pelos professores no ensino da Matemática e a igual diversidade de situações ou problemas que utilizam na sala de aula para a aquisição e consolidação das noções matemáticas pelas crianças.

A proporção de crianças que erraram a resolução, aquando da apresentação horizontal das operações, foi similar nas quatro situações propostas, variando entre .08 (dois sujeitos) e .14 (quatro sujeitos). Dentre os quatro itens propostos na forma de algorítmo, a proporção de acertos nos dois primeiros (em que se faz referência à adição na expressão escrita matemática) foi superior à dos restantes. Das duas situações que se reportam à subtracção, a **d** (em que a incógnita corresponde ao aditivo) foi a que suscitou maior proporção de insucesso (.46).

No que concerne às estratégias de contagem utilizadas no primeiro destes dois grupos de itens (Quadro 6), e para a resolução do item **a**, em que uma das parcelas é o número «5», as crianças (confirmando Kamii, 1986) recorreram sobretudo às estratégias *mentais*. Isto sugere que, subjacente ao processo de resolução, em detrimento de um raciocínio decorrente da compreensão da situação proposta, ou seja, a concepção de subtracção como operação inversa da adição e vice-versa, encontra-se a mera memorização dos casos em causa. Nos restantes itens, o tipo de estratégia mais utilizado foi a *contagem verbal*, possivelmente por se tratar de números pequenos. Curiosamente, o tipo de contagem verbal preferencialmente adoptado, sobretudo nas situações em que estava expressa uma subtracção, foi a «*contagem decrescente até...*»

Quanto às estratégias de contagem usadas nas situações de lacunas em algorítmos (Quadro 7), observou-se uma maior proporção de utilização das estratégias de contagem verbal nos itens **a** e **d**. Na realização do item **b** (em que um dos termos inclui o algarismo «5»), verificou-se maior taxa de uso das estratégias mentais. Para a res-

QUADRO 6
Preenchimento de lacunas (apresentação horizontal)*: Índice de dificuldade e proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens			
	Item a ___+5=11	Item b 6+ ___=15	Item c ___-4=10	Item d 18-___=10
Índice de Dificuldade	.71	.65	.54	.57
Estratégia de Contagem				
Manipulação dos dedos e/ou objectos:	.19	.28	.11	.29
-Aumentar um objecto de cada vez ou Adicionar a ...	.14	.23	.11	.12
-Separar de ...	.05	.05		
-Separar até ...				.17
Contagem verbal:	.31	.44	.74	.71
-Crescente de todos os elementos	.04	.13	.11	
-Crescente, a partir de ...	.04	.04	.05	
-Crescente até ...				.10
-Decrescente a partir de ...				.05
-Decrescente até...	.23	.27	.58	.56
Estratégia mental:	.50	.28	.10	—
-Evocação directa	.27	.05	.05	—
-Derivação das propriedades dos números	.23	.23	.05	—
- Combinação de duas ou mais estratégias	—	—	.05	—

QUADRO 7

Preenchimento de lacunas em algorítmos: *Índice de Dificuldade e proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens			
	Item a …. +6 12	Item b 5 +…. 11	Item c 16 -…. 9	Item d …. -4 4
Índice de Dificuldade	.61	.61	.47	.22
Estratégias de Contagem				
Manipulação dos dedos e/ou objectos:	—	—	.22	.04
-Adicionar a …	—	—	.04	.04
-Separar de …	—	—	.18	—
Contagem verbal:	.44	.26	.26	.29
-Crescente de todos os elementos	.11	.11	—	—
-Crescente até …	—	—	.04	—
-Decrescente a partir de …	.04	.04	.04	—
-Decrescente até…	.29	.11	.18	.29
Estratégia mental:	.29	.47	.21	.07
-Evocação directa	—	.29	.14	—
-Derivação das propriedades dos números	.29	.18	.07	.07
Não classificável	.04			.29

posta ao item **c**, foram diversas as estratégias adoptadas. Nos itens **a** e **c** as proporções das crianças que usaram as estratégias mentais foi de .23 e de .21, respectivamente, possivelmente por se tratar de operações que envolviam casos (propriedades) dos números já memorizados ou casos facilmente acedidos a partir desses. A estratégia verbal mais utilizada em todos os itens deste grupo foi a «*contagem decrescente até…*».

Saliente-se que foram cotadas como *contagem crescente de todos os elementos* as situações em que as crianças adoptaram um procedimento de *ensaio e erro* no qual iniciavam a contagem, sempre, a partir do número 1. Aliás, assistiu-se frequentemente ao recurso por diversas crianças, nas diferentes situações propostas, aos procedimentos de *ensaio e erro por aproximação sucessiva*, nomeadamente .70 para o item **a**; .96 para o **b** e para o **c**; e .83 para o **d**, na apresentação horizontal. Na apresentação algoritmica o seu recurso foi efectuado por .71 das crianças na resolução do item **a**, por .67 na do item **b** e por .64 nas dos itens **c** e **d**.

As estratégias de *manipulação de dedos e/ou objectos* foram, também, usadas com elevada incidência nas situações de lacunas em operações apresentadas na forma horizontal, com excepção para o item **c** na forma algorítmica. Estas estratégias prendem-se, na maioria dos casos, com as que exigem acrescentar elementos e não as que implicam separá-los, exceptuando-se o item **4** do grupo com representação horizontal (subtracção em que a lacuna surge no subtractivo), em que a estratégia de manipulação mais escolhida foi «*separar de…*»

Provas de Nível 2

A análise dos resultados no grupo de itens dos problemas com enunciado (cf. Quadro 8), revela elevadas proporções de acerto em todos os problemas. Salienta-se, contudo, um esforço acrescido de atenção/concentração e a necessidade de direccionamento da interpretação nos problemas cujas «*palavra-chave*» no enunciado são, usualmente, associadas à operação inversa da que deverá ser efectuada. Excepção para o probl-g,

QUADRO 8

Problemas com enunciado*: proporção do tipo de instrução exigida para a execução do problema*

Item		Instrução				
	Classificação Semântica	1.º Tipo	2.º Tipo	3.º Tipo	4.º Tipo	5.º Tipo
Probl-a	Alterar-separando (em que a situação inicial é desconhecida)	.46	.30	.04	.08	.12
Probl-b	Alterar-reunindo (em que a situação inicial é desconhecida)	.65	.15	.00	.12	.08
[redacted]						
Probl-d	Alterar-separando em duas etapas	.76	.12	.00	.08	.04
Probl-e	Comparar (com a quantidade de referência A desconhecida e maior do que a quantidade comparada B)	.58	.29	.04	.00	.08
Probl-f	Comparar (com a quantidade de referência A desconhecida e menor do que a quantidade comparada B)	.54	.27	.00	.00	.19
Probl-g	Igualar (alterar-reunindo, em que a situação intermédia não é conhecida)	.96	.04	—	—	—
Probl-h	Igualar (alterar-separando, em que a situação intermédia não é conhecida)	.92	.04	.00	.00	.04
Probl-i	Igualar (alterar-separando, em que a quantidade de referência A não é conhecida)	.80	.12	.00	.00	.08
Probl-j	Igualar (alterar-reunindo, em que a quantidade de referência A não é conhecida)	.92	.00	.00	.00	.08
Probl-k	Igualar (alterar-reunindo, em que a quantidade comparada B não é conhecida)	.58	.30	.00	.04	.08
Probl-l	Igualar (alterar-separando, em que a quantidade comparada B não é conhecida)	.34	.39	.00	.12	.15

classificado como de *igualar alterar-reunindo* (em que a situação intermédia é desconhecida), o qual se reporta a uma situação muito comum no quotidiano das crianças e é resolúvel pela adopção de uma estratégia de contagem «*verbal crescente a partir de…*», sugerida pelo verbo («*comprar*»).

Provavelmente, por envolver cálculos em que o recurso à memorização dos «dobros e triplos» é plausível, observou-se a adopção dominante de *estratégias mentais* na sua resolução.

As estratégias mais usadas, em todos os problemas, foram as *estratégias mentais*, justificável dado que todas as quantidades (números) referidos nos enunciados eram inferiores a «10».

Comparativamente, a proporção de acertos ao *falso-problema* das crianças que realizaram as provas deste segundo nível (.92) foi muito superior à das que resolveram as provas do primeiro nível (.32), o que poderá ter explicação nas diferentes competências de atenção/concentração das crianças dos dois grupos.

Os resultados na tarefa de *escrita de números através de algarimos* (itens comuns à prova de nível 1 e à prova de nível 2) revelaram que 5 das crianças que integram o grupo que realizou as provas de nível 2 tinham dificuldades na execução do item **c**, e uma delas errou também o item **d**. Saliente-se o facto de que, dessas 5 crianças, 4 não procederam à representação das situações enunciadas pelos problemas na escrita simbólica matemática, e a outra fê-lo com inêxito em 6 dos 11 itens propostos.

No grupo dos *exercícios «tipo» de adição e de subtracção-raciocínio mental* (Quadro 9), as adições com transporte (itens **e**, **h** e **i**) suscitaram alguns «*erros*», contrariamente ao que se passou nas restantes adições (itens **a**, **b** e **c**) em que o

QUADRO 9
Itens *da prova de* nível 2*:* «Exercícios "tipo" **-** *raciocínio mental*»

Itens		Itens	
a)	"342+126=?"	g)	"14-21=?"
b)	"304+20=?"	h)	"444+19=?"
c)	"26+102=?"	i)	"340+1063=?"
d)	"4216-114=?"	j)	"5321-4432=?"
e)	"18+16=?"	k)	"406-333=?"
f)	"25-19=?"	l)	"3060-2105=?"

QUADRO 10
Exercícios «tipo» – «raciocínio mental»*: Índice de dificuldade e proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens										
	a	b	c	d	e	f	h	i	j	k	l
Índice de Dificuldade	.96	1.00	1.00	.81	.96	.85	.69	.92	.69	.73	.58
Estratégias de Contagem											
Manipulação dos dedos e/ou objectos:	.08	—	—	—	.04	—	—	—	—	.04	.04
Contagem verbal:	.15	.16	.15	.27	.35	.38	.23	.27	.34	.23	.27
-Crescente, a partir de ...	.15	.15	.15		.35		.23	.27			
-Crescente até ...				.19		.38			.34	.19	.19
-Decrescente a partir de ...				.04		—			—	.04	.04
-Decrescente até ...				.04		—			—	—	.04
Estratégia mental:	.57	.81	.73	.38	.23	.08	.15	.27	.12	.15	.19
-Execução directa	.57	.81	.73	.38	.23	.08	.15	.23	.12	.15	.19
-Derivação das propriedades dos números								.04			
Combinação de duas ou mais estratégias	.20	.04	.12	.35	.38	.54	.62	.46	.54	.58	.50

êxito foi praticamente total (cf. Quadro 10). Apenas uma das crianças errou a execução do item **a**, salientando-se o facto de a mesma ter sido mal sucedida na escrita simbólica matemática dos números de três algarismos (rúbrica anterior da prova).

Foi nos itens que se reportam a subtracções que se registaram as proporções mais elevadas de insucesso deste grupo, nomeadamente nos itens **d**, **f**, **j**, **k** e **l**. Estes resultados levam à dedução de que, para esta forma de apresentação das operações, e no que concerne às subtracções, a dificuldade eleva-se quer pela presença nos números de ordens de classe vazias, quer pela maior quantidade de algarismos que compõem os números em causa.

Neste conjunto de provas a maioria das crianças recorreu aos procedimentos formais de operacionalização, veiculados pelo sistema de ensino. Assim, para execução de todas as operações (salvo pequenas excepções), as crianças usaram os procedimentos inerentes à aritmética escrita, efectuando os cálculos numa orientação da direita para a esquerda. As situações em que as crianças não procediam à escrita do algorítmo correspondente proporcionaram, junto de algumas delas, erros decorrentes de uma provável *falta de atenção* para com as posições dos algarismos (por exemplo, a subtracção ao número da classe de ordem das dezenas do aditivo o número da classe de ordem das unidades do subtractivo).

No processo de resolução do item **c** e do item

QUADRO 11
Exercícios «tipo» – algorítmos*: Índice de dificuldade e proporção das estratégias de contagem utilizadas*

	Itens						
	a 599 -213	b	c 15 +17	d 411 288 +99	e 304 446 +30	f 936 -498	g 708 -112
Índice de Dificuldade	.96		.96	.92	.92	.65	.62
Estratégias de Contagem							
Contagem verbal	.76		.66	.58	.70	.73	.65
-Crescente, a partir de …			.66	.58	.70		
-Crescente até …	.68					.73	.65
-Decrescente a partir de …	.04					—	—
-Decrescente até…	.04					—	—
Estratégia mental	.13		[illegible]	.15	.15	.12	.12
-Evocação directa	.12		.15	.15	.15	.12	.12
-Derivação das propriedades dos números	—		.04	—	—	—	—
Combinação de duas ou mais estratégias	.12		.15	.27	.14	.14	.23

h (as duas situações de adição em que o valor do primeiro termo é inferior ao do segundo) verificou-se a inversão da ordem das parcelas por .23 e por .12 das crianças, respectivamente. Nas subtracções o procedimento de adição indirecta foi o mais utilizado (em média por .87 crianças).

Refira-se, ainda, que apenas duas crianças avançaram como resposta a impossibilidade de operar no item **g** (operação impossível), enquanto .35 inverteram a ordem dos números transformando-a numa operação viável.

As estratégias de contagem *mentais* foram as mais utilizadas na resolução dos diversos itens, embora com maior proporção nos três primeiros.

No grupo de itens relativo aos *algorítmos*, apenas nos itens **f** e **g** (subtracções que envolvem *empréstimo* entre números de três dígitos) as dificuldades foram mais evidentes (cf. Quadro 11).

A subtracção impossível (entre números naturais) só foi classificada como tal por .12 crianças, e apenas uma criança entre as restantes se decidiu pela inversão dos termos (tornando-a viável). As demais crianças ensaiaram outro tipo de estratégias para viabilizar a operação, como a adição de um algarismo ao aditivo. A forma de apresentação (algorítmo) parece, assim, ter *inibido* a iniciativa de proceder à inversão dos termos.

Na resolução dos diversos itens observou-se uma predominância de procedimentos característicos da matemática *formal*. Curiosamente, as crianças que utilizaram estratégias de subtracção directa nos algorítmos de subtracção não tiveram êxito na resposta à subtracção impossível.

As estratégias de contagem preferencialmente adoptadas na resolução destes itens foram as *verbais* (Quadro 11). Dentre essas, e no que se refere ao cálculo dos resultados para os itens relativos à subtracção, a estratégia predominante foi a de «*contagem crescente até…*». As diferenças de proporção no tipo de estratégias adoptadas deverão prender-se com as combinações de números em causa (grau de dificuldade de evocação).

2. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados permitem concluir, no que concerne à resolução de problemas com enunciado, que as crianças mais jovens realizam com facilidade as situações que se reportam aos problemas canónicos de Alterar (reunindo ou separando), bem como ao de Combinar que implica a reunião de conjuntos. A dificuldade na realização do problema de Combinar que remete para a disjunção de conjuntos é explicável com recurso à concepção de Piaget de que até aos 7/8 anos as crianças não conseguem compreender a inclusão de classes (subclasse/classe), ou seja a lógica da relação «parte-todo».

As dificuldades neste grupo de itens da prova de nível 1 centraram-se, sobretudo, na resolução dos problemas estáticos e de relação, o que era previsível, conhecidos os resultados do trabalho de Carpenter e Moser (1983). Excepção esperada para o problema dinâmico de Alterar-separando em que, de acordo com os estudos (Nieto & Truzilo, 1994), a dificuldade é acrescida pelo facto da situação intermédia ser desconhecida.

No grupo de crianças que realizaram a prova de nível 2, foi evidente, nesta rúbrica, a facilidade na resolução das diversas situações propostas. Contudo, salienta-se o registo de dificuldades associáveis a factores de atenção/concentração, bem como à indução errónea da operação pela presença de «*palavras-chave*» no enunciado.

Foi já oportuno referir-se a influência do factor implícito de *familiaridade* da situação no êxito da realização dos problemas. Trata-se, segundo uma visão construtivista, de situações cuja representação consta na estrutura de conhecimento destas crianças e que, por lhes ser atribuido sentido, teve subjacente quer no momento de aprendizagem, quer no de resolução, maior motivação.

A variabilidade de estratégias adoptadas na resolução de problemas, prende-se, como afirma Vergnaud (in Carpenter & Moser, 1983), com os sistemas de representação que desempenham um papel estruturante nos processos de raciocínio. Elementos do léxico, nomeadamente as palavras «mais e menos», confirmaram a sua relevância na determinação do tipo de operação a utilizar (muitas vezes errada), que Bergeron e Herscovics mencionam no seu trabalho de 1990, o que está também patente na forma como as crianças se confrontaram com a situação de *falso-problema* (ao efectuarem a operação prescindível aí implícita). O lugar de referência às quantidades, maior e menor, na maioria dos casos não influenciou a resolução, talvez pelo facto dos itens de problemas com enunciado das provas não incluirem números com mais de um dígito. Os resultados, na sua globalidade, legitimam os níveis de desenvolvimento descritos por Bergeron e Hercovics (1990). Realça-se desses autores que, apenas aos 7/8 anos, com a aquisição da noção de reversibilidade, se torna possível lidar com uma situação estática à qual é necessário impôr uma estrutura para operar e desvincular de um esquema temporal de relação. Confirma-se, também, a maior dificuldade de operar com «esquemas de relação de dois lugares» que envolvem a comparação de dois conjuntos disjuntos, inerentes à resolução de problemas de *comparar* e *igualar* mais complexos, nomeadamente probl-e, probl-g e probl-l, patente nas proporções de dificuldade inerente à compreensão do enunciado.

A plausibilidade da relação encontrada por Fuson (1992) entre as estratégias de resolução e o nível de desenvolvimento em que as crianças se encontram é passível de ser inferida pelos resultados encontrados. Para a resolução dos problemas de subtracção as crianças mais jovens adoptaram, sobretudo, as estratégias de contagem mais coadunantes com os verbos de acção dos textos dos enunciados, indiciando uma representação mental *textual* do mesmo. O recurso a objectos observáveis para a realização das operações, sobretudo nas situações de subtracção na prova do nível 1 foi evidente, registando-se como média da sua proporção nos diversos problemas .51. Faz-se notar a incidente utilização das estratégias mentais (na generalidade dos problemas) pelas crianças que realizaram a prova de nível 2, e dentre essas, as de derivação dos factos memorizados, para comentarmos com Kamii (1986) que elas só se tornam possíveis quando as crianças dominam a compensação. Nesta fase, as crianças são capazes de se abstrair da representação directa do problema e de operacionalizarem de modo independente as operações a que os mesmos remetem, o que é viável, segundo diversas concepções, pela *automatização de competências* (Anderson in Oers, 1990) ou da acção (Oers, 1990). Por último, as proporções de acertos nos problemas em duas etapas confirmaram a nossa convicção, contrária às afirmações de Nieto e colaboradores (1994), de que os problemas mais simples deste tipo não são mais difíceis do que qualquer um dos problemas de apenas uma etapa.

Uma nota, ainda, para o facto de cerca de metade das crianças que realizaram a prova de nível 1 utilizarem, já com total correcção, os símbolos inerentes à representação matemática das operações referentes aos enunciados, o que evidencia a compreensão daquilo que é expresso por esses, provavelmente inerente à construção dos mesmos com significado. De referir, também, que outras procederam espontaneamente à notação das operações através do registo de caracteres como «pausinhos» ou «bolinhas», o que poderá associar-se ao seu estádio de desenvolvimento, ou apenas reflectir uma das fases do processo de ensino das operações usualmente adoptado pelos professores e amplamente incluso nos manuais escolares. A registar, também, que duas destas crianças, que efectuaram as provas de nível 1, utilizaram a simples justaposição de quantidades (sem indicação das relações entre elas), uma das representações gráficas que constituem produtos normais da fase de construção da relação hierárquica entre os elementos das operações (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1980).

A apresentação dos problemas na forma icónica originou proporções de acertos idênticas às obtidas nas formas equivalentes de adição e de subtracção, inerentes quer aos problemas com enunciado, quer à realização de «exercícios típicos». A dificuldade na decodificação exacta da representação relativa a dois dos casos de subtracção indica que, nem sempre a forma por nós (adultos) preconizada surge às crianças como uma forma *natural* de representação. A opção, defendida por Kamii (1986), de permitir às crianças criar as suas próprias formas de representação parece mais legítima. Por outro lado, a estratégia de contagem com «*acto indicador*» demonstrou ser mais fiável na concepção destas crianças, que a ela recorreram preferencialmente e, nestes casos, foi diminuta a ocorrência de erros. Saliente-se ainda, que, nesta rúbrica apenas incluída nas provas de nível 1, foi mais evidente o recurso a estratégias associadas à aritmética informal (tal como era esperado), nomeadamente a utilização da estratégia de contagem verbal: «*contagem decrescente a partir de…*».

A análise de caso (nas provas de nível 2) revelou que uma das crianças mal sucedida na escrita simbólica matemática dos números de três algarismos errou a execução de grande número de «*exercícios tipo*» de adição e de subtracção (raciocínio mental), facto que confirma a afirmação de que a compreensão e o uso dos conceitos de números de vários dígitos (concepção de unidades múltiplas) repercutem-se nas adições e subtracções com os mesmos (Kamii, 1986). Casos idênticos foram também constatados em várias das crianças que realizaram as provas de nível 1, no que concerne à operação com números bidígitos.

Nos «exercícios tipo» de adição e de subtracção, quer no que se refere à apresentação horizontal (raciocínio mental), quer à apresentação sob a forma de algorítmo, as crianças que realizaram a prova de nível 1, na sua maioria, efectuaram as adições através da evocação directa. Este facto é facilmente entendível, uma vez que se trata de operações com números pequenos. Contudo, o mesmo não se passou com as subtracções (operação aprendida posteriormente), onde as estratégias maioritariamente usadas foram as associadas à manipulação de dedos e/ou objectos. Dentre as estratégias verbais, a mais utilizada para a subtracção, como anteriormente referimos, foi a «*contagem decrescente a partir de* …», uma das que se reportam directamente à aritmética informal (cf. Carraher, 1993).

O uso privilegiado das estratégias inerentes à aritmética informal pode também ser de algum modo inferido do facto de terem sido adoptadas para a resolução de situações em que se sabe serem menos eficientes, nomeadamente em operações com números bidígitos (item **d** – apresentação horizontal e itens **d** e **e** – algorítmos).

Ainda no 1.º nível, e de acordo com os programas escolares, ao não conhecerem as subtracções com empréstimo, mas conhecendo já a regra de o aditivo ter de ser maior do que o subtractivo nas subtracções entre números naturais, as crianças tendiam a inverter a posição dos números (uso generalizado às diversas sub-divisões da subtracção inerente a cada classe de ordem).

As produções do grupo de crianças que realizou a prova de 2.º nível confirmam o acréscimo de dificuldade imposta às situações de subtracção pela necessidade de proceder a empréstimo, bem como à frequência e localização da sua ocorrência numa mesma operação. A presença nos números envolvidos de classes vazias e quantidade de algarismos que os compõem, são outros dois factores que aumentam a dificuldade de operacionalização das subtracções. O transporte nas adições implicou, igualmente, maior dificuldade na sua concretização.

As crianças deste segundo grupo recorreram preferencialmente aos procedimentos formais de operacionalização veiculados pelo sistema de ensino, nomeadamente ao método da *compo-*

sição nas subtracções. Assistiu-se, também, a um recurso mais elevado das estratégias mentais, bem como à utilização de uma *mescla* dessas com outras (cf. Carpenter & Moser, 1983). As crianças que usam estratégias mentais não o fazem de forma consistente, parecendo provável na sua opção por uma estratégia o envolvimento de aspectos como o tamanho nos números e de variáveis internas como o humor.

Como refere Fuson (1992), citando outros autores, os algorítmos possuem características que os tornam amplificadores culturais da capacidade já existente, uma vez que tornam possível operar com números grandes, o que de outra forma, dados os limites mnésicos da espécie humana, era inviável. Assim, à semelhança do que acontece com os *grandes-mestres* no que concerne à representação mental do ábaco (Nunes, 1994) é possível o recurso ao esquema interiorizado do algorítmo, em alternativa à sua escrita, para se realizarem as operações quando apresentadas na forma horizontal, procedimento que justifica a incursão em erro de algumas das crianças que por ele optaram. Esses erros reportaram-se à falta de obediência da regra de se operar sempre com os dígitos da mesma classe de ordem, salvaguardando os casos de transporte e/ou empréstimo em que é afectada uma classe de ordem adjacente. Poder-se-á, ainda, hipotetizar a influência de características de personalidade como a impulsividade/reflexividade nestes produtos (cf. Villagrán, Ferreros, & Sedeño, 1997).

Referência, ainda, às rúbricas relativas ao preenchimento de lacunas de parcelas omissas que foram inseridas na prova de nível 1, para se comentar o recurso evidente à evocação de factos (propriedades de números) e a estratégias de «*ensaio e erro*», o que se conforma com a opinião de Kamii (1986). Esta autora refere que este tipo de exercícios não servem os objectivos a que se destinam, ou seja, as crianças não são levadas a pensar nas combinações dos números em causa. Por sua vez, e confirmando as nossas expectativas, a apresentação das lacunas na forma de algorítmo implicou maiores proporções de erro e/ou omissão.

3. CONCLUSÃO

Os resultados da aplicação de ambas as provas permitiram-nos algumas conclusões. Em primeiro lugar, os dados apontam para a necessidade das aprendizagens na matemática serem significativas, ou seja, enquadradas nas vivências dos alunos. Esta ilacção decorre da taxa variável de sucesso das crianças nos problemas apresentados em função dos seus conteúdos. Outro aspecto que suporta esta inferência é o facto de uma maior proporção das crianças mais jovens ter adoptado as estratégias de contagem que melhor se coadunavam com os verbos de acção dos textos dos enunciados. Facto donde se infere a representação mental das situações relatadas nos mesmos enunciados, a qual decorre dos conhecimentos informais inerentes às experiências quotidianas.

Em segundo lugar, observaram-se maiores níveis de insucesso nos problemas *estáticos*, comparativamente aos problemas *dinâmicos*. Estes dados correspondem à lógica do desenvolvimento expressa por Bergeron e Hercovics (1990). Segundo estes autores, a resolução de uma situação estática apenas se torna possível quando a criança é capaz de operar sem o suporte de um esquema temporal de relação, o que só acontece com a aquisição da noção de *reversibilidade* aos 7/8 anos.

Em terceiro lugar, os problemas em que as crianças que realizaram as provas de nível 2 revelaram maiores índices de insucesso foram os que implicam o recurso a «esquemas de relação de 2 lugares» e que envolvem a comparação de 2 conjuntos disjuntos. Estes dados legitimam, igualmente, os níveis de desenvolvimento descritos por Bergeron e Herscovics (1990). Ainda, nos problemas, encontrou-se evidências consonantes com os autores que referem que a resolução está facilitada nas situações de tradução linear do enunciado na expressão matemática, e que a presença de «palavras-chave» nos enunciados, como «+» e «-», parece constituir-se em elemento determinante na selecção das operações a realizar, inclusivé induzindo em «erros».

Em quarto lugar, e sobretudo na aplicação da prova de nível 1, verifica-se que o nível de desempenho da criança está fortemente condicionado pelas possibilidades que lhe são dadas de manipular materiais ou símbolos. Igualmente, foi constatada predominância da utilização de estratégias mentais pelas crianças que realizaram as provas de nível 2, o que encontra explicação, segundo diversas concepções, na «automatização de competências» ou «automatização da acção» (Oers, 1990) e, de acordo com Kamii (1986), no domínio da noção de *compensação*.

Em quinto lugar, um dos aspectos que achámos curioso no nosso estudo foi o facto de na «representação icónica» as crianças não conseguiram entender o problema da forma que esperávamos. Nos conjuntos seccionados, por exemplo, as crianças interpretaram-nos como se se tratasse de dois conjuntos disjuntos. Este aspecto parece-nos de destacar e deve merecer uma análise mais aprofundada no futuro pois que situações similares são algumas vezes propostas pelos manuais dos alunos.

Em sexto lugar, verificámos que para algumas competências matemáticas destas crianças se torna decisivo o ensino formal dos professores. Situações mais claras dessa importância foram observadas, por exemplo, nas tarefas envolvendo valor posicional, na escrita de números ou empréstimo e transporte. Tais situações diferenciavam de uma forma bastante evidente a resolução pelas crianças nas provas, de nível 1 e de nível 2.

Para finalizar queremos sublinhar que estes pontos constituem algumas das referências a considerar face ao diagnóstico de dificuldades na adição e na subtracção. Contudo, não se esgota aqui o potencial avaliativo das provas a que nos reportámos, dado que elas possibilitam, ainda, a determinação da(s) fase(s) do processo de resolução que origina(m) erro(s) e, consequentemente, a planificação de uma intervenção mais dirigida à especificidade da(s) dificuldade(s) em causa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, A.-M. (1997). *Ensino-aprendizagem da matemática: Estudo com a adição e subtracção no 1.º ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado. Universidade do Minho: Instituto de Educação e Psicologia.

Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1990). Psychological aspects of learning early arithmetic. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Developmental psychology series. London: Academic Press.

Carraher, T. N. (1993). O Desenvolvimento mental e o sistema numérico décimal. In *Aprender pensando: Contribuições da psicologia cognitiva para a educação* (8.ª ed). Petrópolis, Brasil: Editora Vozes.

Fuson, K. C. (1992). An analysis of the counting-on solution procedure in addition and subtraction. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kamii, C., & DeClark, G. (1986). *Reinventando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget*. Campinas, Brasil: Papirus.

Lompscher, J. (1994). The sociohistorical school and acquisition of mathematics. In R. Sholz (Ed.), Psychology of mathematical thinking (cap. V). In *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Notherlands: Kluwer Academic Publishers.

Nieto, L., & Truzillo, C. (1994). *Los problemas de sumar y restar*. Badajoz, España: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura..

Nunes, T. (1994). O papel da representação na resolução de problemas. Dyanmis. *Blumenau, 1* (7), 19--27.

Oers, B. (1990). The development of mathematical thinking in school: A comparison of the action-psychological and information-processing approaches. In B. Greer, & L. Verschaffel (Eds.), *International Journal of Educacional Research: Mathematics education as a proving-ground for information-processing theories, 14* (1), 51-66.

Rangel, A. N. S. (1992). *Educação matemática e a construção do número pela criança: Uma experiência em diferentes contextos sócio-económicos*. Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas.

Schubauer-Leoni, M. L., & Perret-Clermont, A. N. (1980). Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes addictifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*, 297-350.

Sinclair, H. (1987). Constructivism and the psychology of mathematics. In J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education PME – XI* (Vol. 1, pp. 28-41). Montreal: Université de Montreal.

Sinclair, A., Siegrist, F., & Sinclair, H. (1982). Young children's ideas about the written number system. In D. Rogers, & J. Sloboda (Eds.), *The acquisition of symbolic skills*. New York: Plenum.

Tavares, J., & Alarcão, I. (1989). *Psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem*. Coimbra: Livraria Almedina.

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de um estudo sobre adição e subtracção que incidiu sobre a aprendizagem da matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico. O estudo a que este artigo se reporta, aborda as competências de adição e de subtracção, avaliando-as através de um instrumento construido com base em modelos da aprendizagem postulados pelas teorias piagetiana e cognitiva. A amostra foi constituída por 54 crianças com idades compreendidas entre os 7 e os 10 anos (2.º e 4.º anos de escolaridade) de escolas do distrito do Porto. O instrumento de avaliação está organizado em dois níveis de dificuldade (Nível 1 Nível 2), de acordo com o nível de escolarização das crianças. Ambos os níveis de teste incluem diversos subtestes, por exemplo contagem, cálculo e resolução de problemas. Os resultados confirmam alguns dados teóricos e empíricos relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática. Assim, enquanto que as crianças mais jovens usam mais estratégias manipulativas e o recurso a materiais concretos, as mais velhas adoptam sobretudo estratégias mentais. Estas crianças distinguem-se igualmente no facto das mais jovens serem induzidas, na escolha das estratégias a adoptar, pelas características semânticas do enunciado do problema, enquanto que as mais velhas orientam-se mais pelos procedimentos formais (ensino escolar). Finalmente, os resultados sugerem que esta prova de avaliação é útil para a identificação dos conhecimentos e das estratégias que as crianças utilizam na resolução das tarefas de adição e de subtracção, constituindo-se num meio auxiliar dos professores na implementação de ensino individualizado neste domínio.

Palavras-chave: Adição e subtracção, contagem e cálculo, ensino-aprendizagem da matemática.

ABSTRACT

This paper presents the results of a study concerning addition and subtraction at the first level of Elementary School. The study takes the addition and subtraction skills evaluated by an instrument prepared in a piagetian and cognitive learning framework. The sample was formed by 54 children from 7 to 10 years old (2nd and 4th school grades), from public and private schools surround Porto. The test for Math skills evaluation is organized in two levels of difficulty in accord with children’s school grades. Both levels include several parts, for example, counting, calculation or problem-solving. The results confirm some theoretical and empirical data concerning Math instruction and learning. If young children use more manipulative and concrete material strategies, the oldest ones implement more mental strategies. Also, if young children are induced by the semantic characteristics of text in the problem-solving items, the oldest are more independent of these semantic particularities, and they prefer the formal procedures (classroom instruction). Finally, the results suggest that this assessment test can be used to identify the children’s knowledge and strategies to solve addition and subtraction tasks, what is important to help teachers in order the implementation of individual teaching techniques in this domain.

Key words: Addition and subtraction, counting and calculation, math instruction and learning.