

Uso da Propriedade da Aditividade de Componentes de Biomassa Individual de *Quercus pyrenaica* Willd. com Recurso a um Sistema de Equações Não-Linear

João P. Carvalho

Professor Auxiliar

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – ICETA. Departamento Florestal,
Quinta de Prados, 5000-911 VILA REAL

Sumário. A biomassa como medida de avaliação da produção primária dos ecossistemas florestais tem tido um interesse crescente, particularmente em espécies arbóreas cuja copa é uma das componentes exploradas. Em estimativas da biomassa das árvores é importante que se verifique a propriedade da aditividade das suas componentes. Neste trabalho, são comparados dois procedimentos de obtenção da aditividade para componentes de biomassa individual de *Quercus pyrenaica* Willd., aplicados a um caso concreto. Verifica-se que a utilização de um processo de estimação simultânea de um sistema de equações, que impõe restrições na estimação dos parâmetros e considera a existência de correlação contemporânea entre os resíduos, permite obter parâmetros mais eficientes, de que resultam intervalos de predição de estimativas de biomassa mais consistentes.

Palavras-chave: *Quercus pyrenaica* Willd.; biomassa; aditividade; estimação simultânea

Abstract. The biomass as a measure of the primary yield of forest ecosystems has had an increased interest, mainly with tree species in which their crown is an usable component. In total tree biomass estimations, it is important to consider the property of addition of the stem and crown biomass components. In this work, two procedures are compared that apply the summation factor between the biomass components of *Quercus pyrenaica* Willd. trees, as applied to a specific case. Results show that the use of a process of simultaneous estimates of a system of equations, which impose restrictions in the estimate of parameters and considers the existence of a simultaneous correlation between residuals, results in the derivation of more efficient parameters giving more consistent intervals in the prediction of biomass estimates.

Key words: *Quercus pyrenaica* Willd.; biomass; additivity; simultaneous estimation.

Résumé. Il y a un intérêt accru envers la biomasse, comme mesure de la productivité des écosystèmes forestiers, surtout lorsque le houppier est l'un des composants utilisés. Dans l'estimation de la biomasse totale des arbres, il est important de considérer la propriété de l'additivité entre les composants du fût et du houppier. Dans cet article, deux procédures qui permettent l'additivité des composants de la biomasse des arbres de *Quercus pyrenaica* Willd. sont comparées, avec l'application dans un cas concret. L'estimation simultanée d'un système d'équations, ayant des restrictions de paramètres et considérant l'existence de corrélation contemporaine entre les erreurs des équations, permet d'obtenir des paramètres plus efficaces et des intervalles de prédictions plus consistantes.

Mots clés: *Quercus pyrenaica* Willd.; biomasse; additivité; estimation simultanée

Introdução

As avaliações em biomassa têm tido um interesse crescente, não só ao nível da produção florestal, como ao nível dos ciclos biogeoquímicos e da produtividade biológica dos ecossistemas (CROW, 1973; BISCH, 1986). A utilização do peso como unidade de medida é, como referem HEPP e BRISTER (1980) e Avery e BURKHART (1994), particularmente importante em espécies em que há uma utilização total da árvore, ou de uma grande parte da copa, e o uso da madeira como fonte de energia. BAZ *et al.* (1987) utilizam a biomassa no estudo das possibilidades de exploração de povoamentos de *Quercus pyrenaica* Willd., em Léon - Espanha, num programa de produção de energia de origem termoeléctrica. Por seu turno, MONTERO *et al.* (1990) utilizam a biomassa aérea para avaliar o efeito de diferentes intensidades de desbaste na produção de povoamentos de *Pinus pinaster* Aiton., já que uma parte do acréscimo é distribuída para a copa. Em espécies em que a copa é uma componente utilizada como combustível, como acontece com muitas folhosas, a sua incorporação nas estimativas da biomassa da árvore é especialmente importante.

A *Quercus pyrenaica* Willd. é uma importante espécie autóctone de Portugal, sendo a madeira frequentemente utilizada como combustível lenhoso, muitas vezes explorada sob o regime de talhadia. Também para árvores de maior dimensão, com outros fins de utilização, importa dispor de meios de estimativa da biomassa. São escassos os estudos realizados sobre a espécie que permitem a estimativa do peso individual do fuste, e ao nível da

copa não existem avaliações entre nós. Possuir elementos que permitam uma avaliação quantitativa dos povoamentos e possibilite a inferência de estimativas é importante para uma adequada gestão florestal.

Quando se considera mais do que uma componente da árvore é conveniente que se verifique a aditividade das estimativas das suas componentes, propriedade que vem sendo sugerida por autores como KOZAK (1970), CHIYENDA e KOZAK (1984), CUNIA e BRIGGS (1984), e que é por vezes ignorada. Várias abordagens têm sido sugeridas, conforme se pode encontrar em CUNIA e BRIGGS (1984) e PARRESOL (1999).

No presente trabalho, pretende-se comparar dois processos que garantem a aditividade das estimativas das componentes de biomassa de árvores de *Q. pyrenaica*, analisando a confiança de estimativas da biomassa total.

Colheita de dados

O presente estudo utiliza, para as avaliações de biomassa, 166 árvores abatidas em 83 parcelas localizadas em povoamentos de *Quercus pyrenaica* Willd. ao nível do território nacional. Os povoamentos englobam diferentes idades e níveis de ocupação, de forma a considerar uma ampla gama de dimensões das árvores. O procedimento de campo e de laboratório seguiu metodologia de diversos autores (CROW, 1973; HEPP e BRISTER, 1982; MARKLUND, 1983; WIRJODARMODJO e WIROATMODJO, 1983; CHOJNACKY, 1992; MAINGI e FFOLLIOTT, 1992; BARTELINK, 1996). Foram medidos dois diâmetros cruzados da copa (d_c) e a altura da copa viva (hcv), antes do abate das árvores. As árvores

foram desramadas, e seccionadas em toros de 1 m de comprimento, acima do nível do diâmetro à altura do peito (d), até desponta de 2,5 cm. Este valor de desponta é o mais vulgarmente utilizado para a espécie em outros estudos de biomassa (BAZ *et al.*, 1987; BENGOA *et al.*, 1991), correspondendo em muitos casos a uma utilização real do material lenhoso. Na base de cada toro colheu-se uma rodela do tronco, e mediu-se o seu diâmetro, para cubagem do fuste. A densidade básica foi, posteriormente, determinada em laboratório a partir de um provete da rodela de cada toro, seguindo a metodologia apontada por HAYGREEN e BOWYER (1982), e considerando as precauções referidas por BISCH (1986) e BRASIL *et al.* (1994) quanto à determinação do volume da madeira saturada, a qual foi realizada em balança hidrostática. O peso seco do fuste foi obtido a partir do volume do mesmo e da densidade básica (HAYGREEN e BOWYER, 1982). Para a obtenção do peso seco da copa, fez-se uso da relação peso verde/peso seco de toda a copa e de amostras da mesma. Os ramos com diâmetro inferior a 2,5 cm não são aqui considerados, pelo facto de corresponder a uma parte da copa que normalmente não é utilizada como combustível, sendo deixada na floresta, e constituindo uma porção rica em nutrientes (BOUCHON *et al.*,

al., 1985). As componentes aqui consideradas são o peso seco do fuste e da copa, com casca e desponta a 2,5 cm de diâmetro.

Análise dos dados

Procedeu-se a uma prévia detecção de dados anómalos ou influentes, conforme recomendam BELSLEY *et al.* (1980), utilizando gráficos de distribuição e estatísticas de diagnóstico. De acordo com sugestões de diversos autores (SNEE, 1977; MAYER e BUTLER, 1993), procedeu-se a uma partição dos dados, atribuindo 25% para validação dos modelos, o que permite analisar o seu comportamento face a um conjunto de dados independente do utilizado para o ajustamento, e uma forma complementar de avaliação. As estatísticas suplementares de ajustamento utilizadas são a média absoluta dos resíduos (MAR), o resíduo máximo (RMax) e mínimo (RMin), a média dos resíduos (MR), e para a validação, ainda, a eficiência do modelo (EM) e o erro padrão de predição (EPP). No Quadro 1 apresentam-se valores do diâmetro (d), altura total (h), diâmetro médio da copa (d_c), comprimento da copa viva ($ccv = h - hcv$), biomassa do fuste (w_f) e da copa (w_c), dos dados de ajustamento e validação (média, desvio padrão, mínimo e máximo).

Quadro 1 – Caracterização dos dados da biomassa individual do conjunto de ajustamento e validação

Ajustamento					Validação			
	Média	s	Min	Máx	Média	s	Min	Máx
d (cm)	16,4	7,8	2,5	46,0	14,2	5,0	7,6	30,3
h (m)	11,4	3,9	3,3	27,0	10,5	2,4	7,5	18,0
d_c (m)	3,7	1,6	1,3	9,6	3,1	1,1	1,4	6,2
ccv (m)	5,3	1,8	1,0	14,0	4,7	1,5	1,8	8,7
w_f (kg)	115,1	153,2	0,7	1408	67,0	76,3	9,0	398,1
w_c (kg)	24,7	35,3	0,0	212,5	13,5	16,2	2,3	81,7

Para o ajustamento das funções de biomassa individual do fuste e da copa recorreu-se à análise de regressão, a um nível de significância de 5%.

Resultados

Biomassa individual do fuste (w_f)

Para a biomassa do fuste foi seleccionada uma função alométrica, ajustada na forma logarítmica, o que permite homogeneizar a variância dos resíduos (CARROL e RUPPERT, 1988),

$$\ln w_f = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln d + \ln \varepsilon \quad (1)$$

sendo w_f a biomassa do fuste (kg), d o diâmetro à altura do peito (cm), h a altura total da árvore (m), \ln o logaritmo natural, β_i os parâmetros do modelo, e ε o erro residual. O valor dos parâmetros, respectivos erros padrões, r^2_{aj} e QMR, constam no Quadro 2. Estatísticas suplementares de ajustamento e validação podem ser observadas no Quadro 3.

Na transformação de unidades logarítmicas em aritméticas, é aplicado o factor de correcção $e(\hat{\sigma}^2/2) = 0,00770$, conforme sugerem BASKERVILLE (1972), o que permite corrigir enviesamentos gerados no processo de conversão anti-

-logarítmica.

Os resíduos da equação de w_f apresentam uma distribuição aproximadamente normal e homocedasticidade, como se observa na Figura 1.

Biomassa individual da copa (w_c)

Para a obtenção de estimativas da biomassa da copa seleccionou-se, por regressão linear múltipla, a seguinte equação, com um nível de multicolinearidade aceitável (maior factor de inflacção da variância = 7,384; índice de condição da matriz ($X'X$) = 17,438):

$$\ln w_c = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d \cdot ccv + \beta_3 d^2 h \cdot ccv + \ln \varepsilon \quad (2)$$

cujos parâmetros, respectivos erros padrões, r^2_{aj} e QMR são apresentados no Quadro 2. O factor de correcção anti-logarítmica para a equação w_c é $e(\hat{\sigma}^2/2) = 0,0610$. No Quadro 3 mostram-se estatísticas suplementares de ajustamento e estatísticas de validação.

Os resíduos da equação da copa apresentam uma distribuição aproximadamente normal e homocedasticidade (Figura 2).

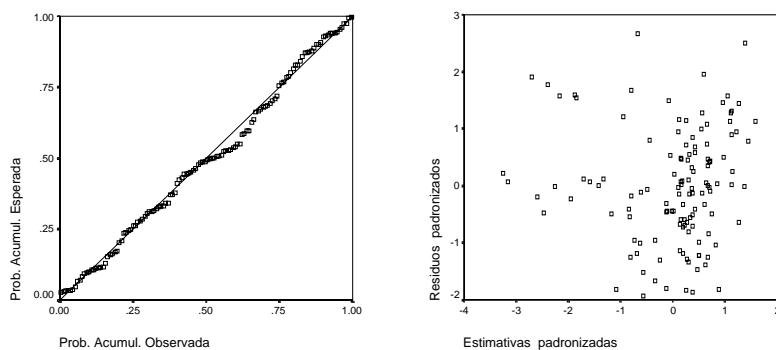


Figura 1 – Gráfico de distribuição normal acumulada dos resíduos e gráfico de distribuição dos resíduos padronizados da equação da biomassa do fuste

Quadro 2 – Parâmetros, erros padrões, $r^2aj.$ e QMR da estimativa para as equações individuais da biomassa do fuste (w_f) e da copa (w_c)

Parâmetros (erro padrão)						
Mod	α_0	α_1	α_2	α_3	$r^2aj.$	QMR
w_f	$2,051 \times 10^{-2}$ ($2,180 \times 10^{-3}$)	1,015 ($1,092 \times 10^{-2}$)			0,990	$0,154 \times 10^{-1}$
w_c	-0,240 ($3,70 \times 10^{-2}$)	0,136 ($0,126 \times 10^{-1}$)	$3,637 \times 10^{-2}$ ($0,472 \times 10^{-2}$)	$-9,865 \times 10^{-6}$ ($0,151 \times 10^{-5}$)	0,901	0,122

Quadro 3 – Estatísticas suplementares de ajustamento e estatísticas de validação para as equações individuais da biomassa do fuste e da copa (MAR, RMax, RMin, MR, EPP: kg)

Ajustamento					Validação					
Mod	MAR	RMax	RMin	MR	EM	EPP	MAR	RMax	RMin	MR
w_f	7,107	36,917	-56,210	0,098	0,988	9,221	6,100	26,066	-25,946	1,204
w_c	5,319	34,605	-32,458	0,916	0,880	5,615	3,257	23,295	-13,662	0,631

$$MAR = \frac{\sum_{i=0}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}; EM = 1 - \sum_{i=0}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / \sum_{i=0}^n (y_i - \bar{Y})^2;$$

$$EPP = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}; MR = \frac{\sum_{i=0}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n}$$

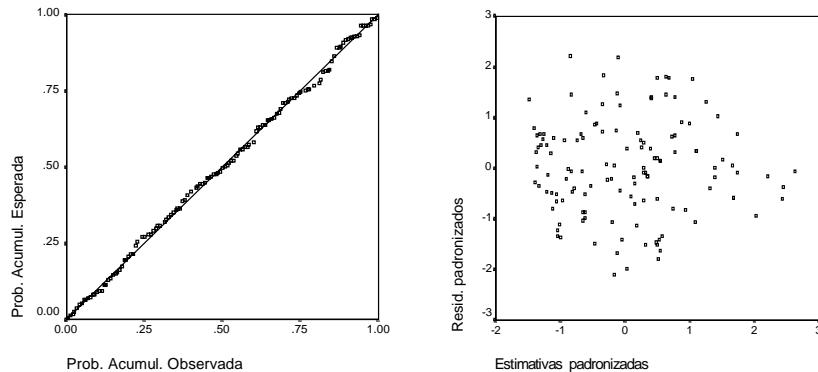


Figura 2 – Gráfico de distribuição normal acumulada dos resíduos e gráfico de distribuição dos resíduos padronizados da equação da biomassa da copa

Biomassa individual total (w_t)

No presente caso, a biomassa total (w_t) corresponde à soma da biomassa do

fuste (w_f) e da copa (w_c), com desposta a 2,5 cm de diâmetro. Desta forma, é conveniente que no processo da estimativa da biomassa total se verifique a

aditividade das estimativas das suas componentes. Esta propriedade vem sendo sugerida por diversos autores como KOZAK (1970), CHIYENDA e KOZAK (1984), CUNIA e BRIGGS (1984) e mais recentemente por PARRESOL (1999).

Neste estudo, procuram-se mostrar as vantagens da estimação simultânea de um sistema de equações como forma de obtenção da aditividade das componentes de biomassa de árvores de *Q. pyrenaica* (processo 2), comparativamente a uma simples combinação das componentes (processo 1), a partir de uma comparação e análise da confiança das estimativas oferecidas por ambos os processos, em aplicação a um caso concreto, conforme CUNIA e BRIGGS (1984) e PARRESOL (1999).

Processo 1

Trata-se de um processo de simples combinação, em que a obtenção da biomassa total (\hat{y}_t) resulta da soma das estimativas dadas pelas equações das $i = 1, \dots, k$ componentes:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_1) \\ \hat{y}_2 &= f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{b}_2) \\ &\vdots \\ \hat{y}_k &= f_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{b}_k) \\ \hat{y}_t &= \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_k\end{aligned}\quad (3)$$

Neste processo, a confiança das estimativas da biomassa total pode ser determinada a partir da correspondente variância,

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{y}_t) &= \sum_{i=1}^k \text{var}(\hat{y}_i) + \\ &+ 2 \cdot \sum_{i < j} \text{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j)\end{aligned}\quad (4)$$

com:

$$\text{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j) = \hat{\rho}_{y_i y_j} \cdot \sqrt{\text{var}(\hat{y}_i) \cdot \text{var}(\hat{y}_j)}$$

sendo $\rho_{y_i y_j}$ a correlação entre y_i e y_j . Pode obter-se um intervalo de confiança para estimativas de \hat{y}_i e um intervalo de predição para novos valores, de 100 $(1-\alpha)\%$ de probabilidade, a partir de:

$$\hat{y}_i \pm t_{(\alpha/2)} \cdot \sqrt{\text{var}(\hat{y}_i)} \quad (5)$$

em que, para o intervalo de confiança,

$$\text{var}(\hat{y}_i) = \mathbf{z}_i(\mathbf{b}_i)' S_{b_i}^2 \mathbf{z}_i(\mathbf{b}_i) \quad (6)$$

e, para o intervalo de predição,

$$\text{var}(\hat{y}_{i(\text{novo})}) = \mathbf{z}_i(\mathbf{b}_i)' S_{b_i}^2 \mathbf{z}_i(\mathbf{b}_i) + \hat{\sigma}_i^2 \quad (7)$$

com $\mathbf{z}_i(\mathbf{b}_i)$ o vector das derivadas parciais face aos parâmetros da equação i , $S_{b_i}^2$ a matriz de variância-covariância dos parâmetros da equação i , e $\hat{\sigma}_i^2$ o quadrado médio dos resíduos da regressão.

No presente caso, suponha-se uma árvore com $d = 16,4$ cm, $h = 11,4$ m, $dc = 3,7$ m e $ccv = 5,3$ m. Usando as equações (1) e (2) de w_f e w_c , com respectivos factores de correcção $e(\hat{\sigma}^2/2)$, obtém-se, em unidades logarítmicas, $\ln w_f = 4,2693$ e $\ln w_c = 2,6043$ pelo que,

$$\ln w_t = 4,4426.$$

Para se obter $\text{var}(\hat{w}_f)$, o vector $\mathbf{z}_f(\mathbf{b}_f)'$ das derivadas parciais para w_f é

$$\mathbf{z}_f(\mathbf{b}_f)' = [1 \quad \ln(d^2 h)] = [1 \quad 8,028176],$$

a matriz de variância-covariância dos parâmetros é obtida através da expressão

$$S_{b_f}^2 = \hat{\sigma}^2 [X'X]^{-1}:$$

$$S_{b_f}^2 = \begin{bmatrix} 0,0030557 & -0,00038268 \\ -0,00038268 & 0,000049441 \end{bmatrix}$$

pelo que,

$$\text{vár}(\hat{w}_f) = \mathbf{z}_f(\mathbf{b}_f)' S_{\mathbf{b}_f}^2 \mathbf{z}_f(\mathbf{b}_f) = 0,000097735$$

Para a componente da copa, o vector das derivadas parciais é,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_c(\mathbf{b}_c)' &= [1 \ d \ dc \cdot ccv \ d^2h \cdot ccv] = \\ &= [1 \ 16,4 \ 19,61 \ 16250,56] \end{aligned}$$

e a matriz de variância-covariância dos parâmetros da equação w_c , $S_{\mathbf{b}_c}^2$,

$$S_{\mathbf{b}_c}^2 = \begin{bmatrix} 0,018762 & -0,0015515 & 0,00021133 & 1,28952 \times 10^{-7} \\ -0,0015515 & 0,00015756 & -0,000038387 & -9,46525 \times 10^{-9} \\ 0,00021133 & -0,000038387 & 0,000022344 & -1,67986 \times 10^{-9} \\ 1,28952 \times 10^{-7} & -9,46525 \times 10^{-9} & -1,67986 \times 10^{-9} & 2,29718 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

o que conduz a $\text{vár}(\hat{w}_c) = 0,0011203$. O coeficiente de correlação entre $\ln w_f$ e $\ln w_c$ é de 0,876. A variância total, $\text{vár}(\hat{w}_t)$, é então,

$$\begin{aligned} \text{vár}(\hat{w}_t) &= 0,000097735 + 0,0011203 + 2 \times 0,876 \times \\ &\quad \times \sqrt{0,000097735 \times 0,0011203} = 0,0017978 \end{aligned}$$

O intervalo de confiança, a um nível de 95%, é dado por ($t_{0,025,160} = 1,975$), $4,4426 \pm 1,975 \times \sqrt{0,001798} = [4,3589; 4,5263]$ e em unidades aritméticas, [78,2; 92,4] kg.

Por seu turno, para um intervalo de predição, as variâncias das componentes são,

$$\text{vár}(\hat{w}_{f(\text{novo})}) = 0,015498$$

$$\text{vár}(\hat{w}_{c(\text{novo})}) = 0,12312$$

e a variância total, $\text{vár}(\hat{w}_{t(\text{novo})}) = 0,215150$ pelo que, o intervalo é, em unidades logarítmicas, $4,4426 \pm 0,91609 = [3,5265; 5,3587]$ e em unidades aritméticas, [34,0; 212,4] kg.

Processo 2

A aditividade pode ser garantida através da utilização de uma equação da biomassa total com as mesmas variáveis independentes das equações das suas componentes. Procede-se, deste modo, a

uma nova estimativa dos parâmetros num sistema de equações, impondo restrições nos parâmetros da equação total (PARRESOL, 1999). A equação total é, assim, função das variáveis independentes de cada componente i ,

$$\begin{aligned} y_i &= f_i(X_i, \beta_i) + \epsilon_i, \quad i=1, \dots, k \\ y_{\text{total}} &= f_{\text{total}}(X_1, X_2, \dots, X_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) + \epsilon_k \end{aligned} \quad (8)$$

Nesta análise é utilizado o método de estimação simultânea SUR ('Seemingly Unrelated Regressions'), o qual possibilita estimar um sistema de equações estatisticamente correlacionadas com restrições (PARRESOL, 1999). Por outro lado, permite igualmente considerar a existência de correlação contemporânea entre os resíduos das equações, de que resulta uma menor variância. Como referem CHIYENDA e KOZAK (1984) é pouco realista considerar que as i componentes são independentes entre si e, portanto, os resíduos ϵ_i ($i = 1, \dots, k$) não estão correlacionados, uma vez que as mesmas árvores fornecem valores para as várias componentes. Desta forma, garantidos os pressupostos estocásticos relativos aos vectores residuais, obtém-se estimativas dos parâmetros das equações mais eficientes e intervalos de predição de maior confiança. Referências ao método de estimação SUR podem ser encontradas em SRIVASTAVA e GILES (1987).

No presente caso, o sistema inclui as seguintes equações estruturais relativas à biomassa do fuste, da copa e total:

$$\begin{cases} \ln w_f = \ln [\beta_{10} \cdot (d^2 h)^{\beta_{11}}] + \ln \epsilon_f \\ \ln w_c = \beta_{20} + \beta_{21} d + \beta_{22} d_c \cdot ccv + \beta_{23} d^2 h \cdot ccv + \\ + \ln \epsilon_c \\ \ln w_t = \ln [\beta_{10} \cdot (d^2 h)^{\beta_{11}} + e(\beta_{20} + \beta_{21} d + \\ + \beta_{22} d_c \cdot ccv + \beta_{23} d^2 h \cdot ccv)] + \ln \epsilon_t \end{cases} \quad (9)$$

A terceira equação do sistema considerando a biomassa total impõe restrições aos parâmetros, garantindo a aditividade das componentes da biomassa do fuste e da copa. No presente caso, obtém-se um sistema de equações não-linear que deverá ser estimado usando NSUR ('Non-Linear Seemingly Unrelated Regressions').

Em notação matricial o sistema de $M = 3$ equações pode ser escrito da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{0}, \mathbf{X}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ou alternativamente, na forma compacta, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$ com \mathbf{y}_i o vector de variáveis observadas, \mathbf{X}_i a matriz cujas colunas compreendem as observações dos regressores, $\boldsymbol{\beta}_i$ o vector dos parâmetros e $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ o vector dos erros. Assume-se que o vector das variáveis aleatórias $\boldsymbol{\varepsilon}$ segue uma distribuição com média comum zero ($E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0$), variância e covariância constante ($E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$ e $E(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_j') = \sigma_{ij}\mathbf{I}$, com \otimes o produto de Kronecker). As covariâncias não conhecidas do modelo (10), σ_{ij} , são estimadas através da seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{(T - K_i)^{1/2}(T - K_j)^{1/2}} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j \quad (11)$$

fornecendo estimativas consistentes das variâncias-covariâncias, onde $\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\beta}_i)$ são os resíduos obtidos por EGNLS ('estimated generalized non-linear least squares'), T é o número de observações, K_i e K_j são o número de parâmetros de cada equação i e j . Designando $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ como a matriz que contém as estimativas $\hat{\sigma}_{ij}$, o estimador não-linear NSUR do vector $\boldsymbol{\beta}$ é dado por

(PARRESOL, 1999):

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{e}'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{e} = [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})]'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{I})[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})] \quad (12)$$

obtido em processo iterativo de convergência minimizando a soma dos quadrados dos resíduos. Para o cálculo das variâncias é necessário obter a matriz das derivadas parciais dos resíduos em respeito aos parâmetros, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})'$, da seguinte forma:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})' = \frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_1'}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \frac{\partial \mathbf{f}_2'}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}_M'}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right] \quad (13)$$

A matriz estimada de variâncias-covariâncias dos parâmetros é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}} = [\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})]^{-1}, \quad (14)$$

a variância do sistema NSUR por,

$$\hat{\sigma}_{\text{NSUR}}^2 = \frac{\mathbf{e}'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{e}}{MT - K}, \quad (15)$$

e a variância estimada da equação i do sistema é,

$$S_{\hat{y}_i}^2 = \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\beta})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\beta}) \quad (16)$$

com $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\beta})$ um vector coluna contendo as derivadas parciais em ordem aos parâmetros da equação i (JUDGE *et al.*, 1985).

A estimativa dos parâmetros do sistema (9) foi realizada usando NSUR. No Quadro 4 apresentam-se os parâmetros obtidos para ambas as equações de w_f e w_c , respectivos erros padrões, e estatísticas de ajustamento.

No Quadro 5 mostram-se estatísticas complementares de ajustamento e estatísticas de validação, usando o método 'NSUR' no ajustamento das equações w_f e w_c . Os factores de correcção antilogarítmica, $e(\hat{\sigma}^2 / 2)$, são 0,004995 e 0,0610 para w_f e w_c , respectivamente.

Quadro 4 – Parâmetros obtidos, erros padrões, r_{aj}^2 e QMR das equações w_f e w_c , segundo o método 'NSUR'

Mod	Parâmetros (erro padrão)					QMR
	α_0	α_1	α_2	α_3	$r^2aj.$	
w_f	0,0217 (0,159x10 ⁻²)	1,012 (0,910x10 ⁻²)			0,989	0,999x10 ⁻²
w_c	-0,141 (0,015)	0,128 (0,981x10 ⁻²)	3,750x10 ⁻² (0,250x10 ⁻²)	-9,560x10 ⁻⁶ (0,118x10 ⁻⁵)	0,901	0,122

Quadro 5 – Estatísticas suplementares de ajustamento e validação, no ajustamento simultâneo das equações de w_f e w_c (MAR, RMax, RMin, MR, EPP: kg)

Mod	Ajustamento				Validação					
	MAR	RMax	RMin	MR	EM	EPP	MAR	RMax	RMin	MR
w_f	7,026	31,795	-58,160	-2,899	0,989	8,900	5,676	17,504	-31,246	0,079
w_c	5,164	37,341	-27,359	1,482	0,885	5,505	3,127	24,052	-11,782	0,831

É, então, possível calcular um intervalo de confiança para um valor estimado, \hat{y}_i , e um intervalo de predição para um novo valor, $\hat{y}_{i(novo)}$, com $(1-\alpha)\%$ de probabilidade, através das seguintes expressões:

Estimativa da equação i: $\hat{y}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{b})$

Intervalo de Confiança:

$$\hat{y}_i \pm t_{(\alpha/2)} \sqrt{S_{\hat{y}_i}^2}$$

Intervalo de Predição:

$$\hat{y}_i \pm t_{(\alpha/2)} \sqrt{S_{\hat{y}_i}^2 + \hat{\sigma}_{NSUR}^2 \cdot \hat{\sigma}_{ii}}$$

com $\hat{\sigma}_{ii}$ o elemento i,i -ésimo da matriz $\hat{\Sigma}$.

Suponha-se a mesma árvore considerada no exemplo do Processo 1 ($d = 16,4$ cm, $h = 11,4$ m, $dc = 3,7$ m e $ccv = 5,3$ m). No presente caso, a matriz de variância-covariância dos parâmetros é (equação 17), e a variância do sistema

NSUR obtida, $\hat{\sigma}_{NSUR}^2 = 0,99695$.

O vector $\mathbf{p}_{w_t}(\mathbf{b})$ que contém as derivadas parciais da equação w_t em ordem aos parâmetros é, com $u = b_{10}(d^2h)^{b_{11}} + e^{(b_{20} + b_{21}d + b_{22}d_c \cdot ccv + b_{23}d^2h \cdot ccv)}$, (equação 18).

A variância, $S_{\hat{w}_t}^2$, da equação da biomassa total é, então,

$$S_{\hat{w}_t}^2 = \mathbf{p}_{w_t}(\mathbf{b})' \cdot \hat{\Sigma}_b \cdot \mathbf{p}_{w_t}(\mathbf{b}) = 0,00078013.$$

A biomassa total estimada da árvore é $\ln w_t = 4,4669$. O intervalo de confiança de 95% para w_t é então ($t = 1,975$), $4,4669 \pm 0,055163 = [4,4117; 4,5221]$ e em unidades aritméticas, $[82,4; 92,0]$ kg.

Por seu turno, o intervalo de predição é, com $\hat{\sigma}_{33} = 0,0114$ o elemento da matriz $\hat{\Sigma}$, $4,4669 \pm 0,21766 = [4,2492; 4,6846]$ e em unidades aritméticas, $[70,0; 108,3]$ kg.

$$\hat{\Sigma}_b = \begin{bmatrix} 2,5348 \times 10^{-6} & -,000014 & ,0000183 & -1,008 \times 10^{-6} & -5,709 \times 10^{-8} & 5,427 \times 10^{-12} \\ -,000014 & ,0000827 & -,000102 & 5,8761 \times 10^{-6} & 3,7714 \times 10^{-7} & -4,12 \times 10^{-11} \\ ,0000183 & -,000102 & ,0132 & -,001047 & ,000141 & 8,493 \times 10^{-8} \\ -1,008 \times 10^{-6} & 5,8761 \times 10^{-6} & -,001047 & ,0000962 & -,000017 & -7,222 \times 10^{-9} \\ -5,709 \times 10^{-8} & 3,7714 \times 10^{-7} & ,000141 & -,00017 & 6,2552 \times 10^{-6} & -5,62 \times 10^{-11} \\ 5,427 \times 10^{-12} & -4,12 \times 10^{-11} & 8,4931 \times 10^{-8} & -7,222 \times 10^{-9} & -5,62 \times 10^{-11} & 1,396 \times 10^{-12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$p_{W_f}(b) = \begin{bmatrix} (d^2h)^{b_{11}} / u \\ b_{10}(d^2h)^{b_{11}} \cdot \ln(d^2h) / u \\ e^{(b_{20} + b_{21}d + b_{22}d_c \cdot ccv + b_{23}d^2h \cdot ccv)} / u \\ d \cdot e^{(b_{20} + b_{21}d + b_{22}d_c \cdot ccv + b_{23}d^2h \cdot ccv)} / u \\ d_c \cdot ccv \cdot e^{(b_{20} + b_{21}d + b_{22}d_c \cdot ccv + b_{23}d^2h \cdot ccv)} / u \\ d^2h \cdot ccv \cdot e^{(b_{20} + b_{21}d + b_{22}d_c \cdot ccv + b_{23}d^2h \cdot ccv)} / u \end{bmatrix} \quad (18)$$

Conclusões

Depois da abordagem feita por KOZAK (1970) relativa à propriedade da aditividade das componentes de equações lineares de biomassa, REED e GREEN (1985) estendem os métodos para a aplicação com equações não-lineares usando os mínimos quadrados generalizados. A consideração da aditividade num sistema de equações, assegura a consistência entre as suas componentes. No presente estudo, a aplicação do processo de obtenção da aditividade é realizada com equações logarítmicas, as quais permitem que os resíduos apresentem distribuição normal e homocedasticidade (CARROL e RUPPERT, 1988).

As equações apresentadas para a estimativa da biomassa individual do fuste e da copa, para a *Quercus pyrenaica*, mostram níveis de precisão e confiança satisfatórios.

Verifica-se que o ajustamento simultâneo pelo método NSUR não conduziu a variações de precisão apreciáveis. Os valores de r^2 e QMR sofreram variações

de pequena ordem para w_f , e não se alteraram para w_c . A maior variação ocorreu na diminuição do erro padrão dos parâmetros, que é resultado mais directo da aplicação do método 'SUR', quando em presença de correlação contemporânea entre os resíduos das equações relacionadas da biomassa do fuste e da copa. Analisando as estatísticas suplementares de ajustamento e de validação, verifica-se que a aplicação do método SUR conduz, dum modo geral, a variações de pequena magnitude nas mesmas. Para a equação da biomassa do fuste, algumas estatísticas de ajustamento pioraram (RMin, MR), enquanto outras melhoraram (r^2 , QMR, MAR, RMax); para os dados de validação, ocorre uma melhoria das mesmas, com excepção de RMin. Para a equação da biomassa da copa, r^2 e QMR mantêm-se iguais; ocorre uma melhoria para MAR e RMin ao nível do ajustamento, e para EM, EPP, MAR e RMin para os dados de validação. Globalmente, a aplicação do método SUR tem um efeito ligeiro nas estatísticas de ajustamento e validação, comparativamente ao método dos mínimos

quadrados ordinário.

Os maiores efeitos da aplicação do processo de estimação simultânea, notam-se ao nível da redução da amplitude do intervalo de confiança e de predição das estimativas. Entre o processo 1 e 2, a amplitude do intervalo de confiança, passou de 14,2 a 9,6 kg, o que representa uma diminuição de cerca de 32%. Importante diminuição ocorreu para o intervalo de predição, cuja amplitude diminuiu de 178,4 para 38,3 kg, correspondendo portanto, para o caso, a uma redução de cerca de 79%. Estas diminuições resultam da menor variância obtida pela aplicação do método de estimação SUR, ao considerar a correlação contemporânea entre as componentes, com obtenção de parâmetros mais eficientes. Tal tem uma importante implicação em análises de confiança e acções de planeamento. A matriz de variância-covariância dos parâmetros e o vector das derivadas parciais da equação da biomassa total em ordem aos parâmetros, aqui apresentados, permitem realizar inferências sobre outras estimativas de biomassa para árvores de *Quercus pyrenaica*.

Agradecimentos

O autor agradece ao Prof. Ângelo de Oliveira do ISA, Prof. Aloísio Loureiro e Prof. Pacheco Marques da UTAD a leitura do texto.

Bibliografia

- AVERY, T.E.; BURKHART, H.E., 1994. *Forest measurements*. John Wiley & Sons, New York, 408 pp., 4^a ed.
- BARTELINK, H.H., 1996. Allometric relationships on biomass and needle area of Douglas-fir. *Forest Ecol. Manage.* **86** : 193-203.
- BASKERVILLE, G.L., 1972. Use of logarithmic regression in the estimation of plant biomass. *Can. J. Forestry* **2** : 49-53.
- BAZ, S., PRIETO, A., GONZÁLEZ, I., TORRE, M., 1987. *Evaluación energética de las masas de Quercus pyrenaica para la producción de energía de origen termoeléctrico*. UNESA-ASINEL, 148 pp.
- BELSLEY, D.A., KUH, E., WELSCH, R.E., 1980. *Regression Diagnostics. Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. John Wiley & Sons, New York, 292 pp.
- BENGOA, J., SAN MIGUEL, A., ALLUE, M., 1991. Estimacion de biomassa y determinacion de calidad en tallares de rebollo (*Quercus pyrenaica* Willd.) de La Rioja. In III Reunión de la Ass. Esp. Ecología Terrestre, León, Set., 15 pp.
- BISCH, J.L., 1986. Le taux de conversion de volume de bois frais en biomasse: amélioration de ses méthodes d'estimation. *Ann. Sci. For.* **43**(3) : 383-396.
- BOUCHON, J., NYS, C., RANGER, J., 1985. Cubage, biomasse et minéralomasse: comparaison de trois taillis simples des Ardennes primaires. *Acta Oecologica* **6**(20) : 53-72.
- BRASIL, M.A.M., VEIGA, R.A.A., TIMONI, J.L., 1994. Erros na determinação da densidade básica da madeira. *CERNE* **1**(1) : 55-57.
- CARROL, R.J., RUPPERT, D., 1988. *Transformation and weighting in regression*. Chapman & Hall, New York, 249 pp.
- CHIYENDA, S.S., KOZAK, A., 1984. Additivity of component biomass regression equations when the underlying model is linear. *Can. J. For. Res.* **14** : 441-446.
- CHOJNACKY, D.C., 1992. Estimating volume and biomass for dryland oak species. In *Ecology and Management of Oaks and Associated Woodlands: Perspectives in the Southwestern United States and Northern Mexico*, Sierra Vista, Workshop, Apr., pp. 155-161.
- CROW, T.R., 1973. *The estimation of biomass in a natural stand of Jack pine (Pinus banksiana Lamb.)*. Dissertação de Doutoramento, University of Minnesota, 143 pp.

- CUNIA, T., BRIGGS, R.D., 1984. Forcing additivity of biomass tables: some empirical results. *Can. J. For. Res.* **14** : 376-384.
- HAYGREEN, J.G., BOWYER, J.L., 1982. *Forest products and wood science*. Iowa State University Press, 495 pp.
- HEPP, T. E., BRISTER, G.H., 1982. Estimating crown biomass in Loblolly pine plantations in the Carolina flat woods. *Forest Sci.* **28**(1) : 115-127.
- JUDGE, G.G., HILL, R.C., GRIFFITHS, W.E., LÜTKEPOHL, H., LEE, T-C., 1988. *Introduction to the theory and practice of econometrics*. John Wiley and Sons, New York, 1024 pp.
- KOZAK, A., 1970. Methods for ensuring additivity of biomass components regression analysis. *For. Chron.* **46**(5) : 402-404.
- MAINGI, J.K., FFOLLIOTT, P.F., 1992. Specific gravity and estimated physical properties of Emory oak in Southeastern Arizona. In *Ecology and Management of Oaks and Associated Woodlands: Perspectives in the Southwestern United States and Northern Mexico*, Sierra Vista, Workshop, Apr., pp. 147-149.
- MARKLUND, L.G., 1983. Collection data for biomass equation development: some methodological aspects. In *Mesures des biomasses et des accroissements forestiers*, Orléans, Colloque, Oct., INRA; pp. 37-43.
- MAYER, D.G., BUTLER, D.G., 1993. Statistical validation. *Ecological Modelling* **68** : 21-32.
- MONTERO, G.; ORTEGA, C.; CAÑELLAS, I., BACHILLER, A., 1990. Productividad aérea y dinámica de nutrientes de una repoblación de *Pinus pinaster* Ait. sometida a distintos regímenes de claras. *Invest. Agr.: Sist. Recur. For.*, Fuera Serie **1** : 175-206.
- PARRESOL, B.R., 1999. Assessing tree and stand biomass: a review with examples and critical comparasions. *Forest Sci.* **45**(4) : 573-593.
- REED, D.D., GREEN, E.J., 1985. A method of forcing additivity of biomass tables when using nonlinear models. *Can. Jour. For. Res.* **15** : 1184-1187.
- SNEE, R.D., 1977. Validation of regression models: methods and examples. *Technometrics* **19**(4) : 415-428.
- SRIVASTAVA, V.K., GILES, D.E.A., 1987. *Seemingly unrelated regression equations models. estimation and inference*. Marcel Dekker, Inc., New York, 374 pp.
- WIRJODARMODJO, H., WIROATMODJO, P., 1983. Collection data for biomass equation development: some methodological aspects. In *Mesures des biomasses et des accroissements forestiers*, Orléans, Colloque, Oct., INRA, pp. 125-134.

Entregue para publicação em Junho de 2002
Aceite para publicação em Março de 2003