

Dinâmica simbólica e ferradura de Smale

Fernanda Amélia Ferreira •

fernandaamelia@eseig.ipp. pt

(recebido em 22 de Março de 2007; aceite em 22 de Outubro de 2007)

Resumo: Descrevemos a “ferradura de Smale”, um sistema dinâmico bem conhecido que apresenta um conjunto de propriedades muito importantes em Sistemas Dinâmicos. O estudo da dinâmica da “ferradura de Smale” permite-nos entender a importância do conceito de dinâmica simbólica.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Ferradura de Smale, Dinâmica simbólica

Abstract: We describe the Smale horseshoe, a well-known dynamical system that presents a set of properties which are very important in Dynamical Systems. The study of the dynamics of the Smale horseshoe allows us to understand the importance of the notion of symbolic dynamics.

Keywords: Dynamical Systems, Smale horseshoe, Symbolic dynamics

• ESEIG - Escola Superior de Estudos Industriais e de Gestão, Instituto Politécnico do Porto

1. Introdução

Henri Poincaré fundou, no início do séc. XX, a moderna teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos, cujo desenvolvimento contou com contribuições importantes de vários matemáticos, como Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Levinson e Kolmogorov, entre outros, que originaram um novo campo de investigação sobre Sistemas Dinâmicos: *a Teoria do Caos* (Gleick (1994) e Stewart (2000) são dois livros de divulgação científica sobre Caos).

Nos anos 60, Stephen Smale foi também um dos que se interessaram em explorar a teoria de Poincaré, tendo contribuído para uma explosão de novas ideias em Sistemas Dinâmicos. Uma das suas primeiras contribuições foi uma conjectura falsa. Smale supôs que praticamente todos os sistemas dinâmicos tendiam a atingir, na maioria das vezes, um comportamento não demasiadamente estranho, o que implicava, segundo a terminologia actual, que *o caos não existia*. As “más notícias” chegaram-lhe através de uma carta de Norman Levinson, descrevendo um resultado deste, que continha um contra-exemplo à conjectura. Smale trabalhou no desafio colocado por essa carta às suas ideias, tendo acabado por se convencer de que, de facto, a sua conjectura estava errada (cf. sítios [1] e [2]). E essa convicção resultou, especialmente, daquilo que entretanto descobriu: a *ferradura de Smale*. Trata-se de uma transformação topológica que fornece uma base para o entendimento das propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos. Para construirmos uma versão simples da ferradura de Smale, tomemos um quadrado, estiquemo-lo até ficar um longo rectângulo fino, dobre-lo em ferradura e coloquemo-lo sobre o quadrado original. Iterando este processo, é fácil ver que o segundo passo produz uma espécie de ferradura dentro da ferradura, com três dobras (ver Figura 2.3). Cada iteração duplica as dobras existentes e adiciona-lhe outra ainda. Assim, no limite deste processo obteríamos um tipo de curva infinitamente contorcida. Escolhendo dois pontos vizinhos no quadrado original, não se poderá adivinhar onde eles estarão no fim. Ficarão arbitrariamente afastados um do outro pelo encurvamento e esticamento. A ferradura forneceu uma clara analogia visual da sensibilidade às condições iniciais que Lorenz iria descobrir mais tarde, no estudo do clima. A ferradura de Smale tornou-se uma das primeiras formas geométricas capazes de descrever um sistema dinâmico, mostrando a presença da imprevisibilidade da dinâmica a longo prazo, mesmo quando a lei de evolução do sistema seja totalmente determinista.

2. Ferradura de Smale

Vamos analisar uma função designada, em geral, por *ferradura de Smale*. Depois do trabalho pioneiro de Henri Poincaré (1854-1912) que considerou pela primeira vez a utilidade do estudo de estruturas topológicas no *espaço de fases* das órbitas ou trajectórias dinâmicas, mas com estudos unicamente orientados para sistemas hamiltonianos *conservativos* (admite-se que “conservam” no tempo, um dado volume no espaço de fases), que aliás eram característicos dos estudos clássicos de Mecânica Celeste, pensou-se utilizar análises semelhantes em *sistemas dissipativos*, ou seja, nos quais pudesse ser considerado o problema das forças de atrito. Ora estes sistemas têm uma característica comum: à medida que o sistema evolui, a região do espaço de fases ocupada pelo sistema vai diminuindo de volume. Esta contracção de volume tem uma forte tendência para simplificar a estrutura topológica das órbitas no espaço de fases. Assim, pode-se esperar que um sistema dinâmico complexo, mesmo se considerado inicialmente num espaço de fases com um número elevado de dimensões (“comandado”, por exemplo, por equações de derivadas parciais), pode ter um comportamento final num subespaço com somente algumas dimensões. Aliás, experiências recentes, no domínio da energia cinética das reacções químicas e no domínio da Física do estado sólido e dos plasmas, sugerem que, quanto melhor for a compreensão da dinâmica de modelos matemáticos de pequena dimensão, melhor se entenderá o comportamento de sistemas dissipativos mais complexos. Esses modelos de pequena dimensão são em geral típicos de problemas de valores iniciais em equações diferenciais ordinárias como, por exemplo, a chamada *equação de Van der Pol*

$$\theta'' + c(\theta^2 - 1)\theta' + \theta = 0, \quad c = \text{constante}$$

que descreve oscilações amortecidas, introduzida por Rayleigh (1896) e estudada teórica e experimentalmente por Van der Pol (1927), nos seus estudos sobre circuitos eléctricos. O amortecimento das oscilações depende do factor $\theta^2 - 1$, e assim se θ for pequeno, o amortecimento é negativo e a amplitude aumenta, enquanto que para valores grandes de θ , o amortecimento é positivo e a solução decai. Pode então parecer que existe um comportamento periódico, mas não é assim: quando a solução deixa de ser um valor muito grande ou muito pequeno, não existe qualquer possibilidade de voltar atrás. Todas as órbitas são espirais convergindo para um *ciclo limite* que é a única solução periódica da equação de Van der Pol.

Se considerarmos a equação de Van der Pol com segundo membro diferente de 0, verifica-se a possível existência de vários comportamentos finais, dependendo somente da forma como o oscilador arrancou, ou seja, dependendo do valor inicial. Este fenómeno de existência de vários comportamentos finais possíveis no mesmo sistema, sabe-se hoje que é comum a sistemas dinâmicos não-lineares e recorrentes.

Cartwright e Littlewood (1945) e Levinson (1949) verificaram um outro aspecto importante deste fenómeno: em casos em que são possíveis dois tipos de soluções (ou seja, dois tipos de órbitas), não se sabe para que tipo de solução se vai inclinar a órbita e isto pode suceder num espaço de tempo arbitrariamente longo. Uma análise geométrica do espaço de fases deste complicado comportamento transitório foi efectuada por Smale (1963) no seu trabalho “Diffeomorphisms with many periodic points”, que mostrou que, apesar do aspecto do problema parecer verdadeiramente aleatório, essas fases transitórias “hesitantes” são realmente comandadas por relativamente simples esticamentos e dobras de conjuntos no espaço de fases. Foi no estudo deste assunto que Smale considerou o que hoje se chama a “ferradura de Smale”. Trata-se de uma função que transforma um conjunto de pontos no plano, usando operações topológicas básicas que consistem em alargamentos (o que permite dar sensibilidade às condições iniciais) e dobras (que permitem a atracção). Como as órbitas no espaço de fases não podem cruzar-se, o efeito das sucessivas operações de esticamentos e dobras é a obtenção de um objecto de grande complexidade topológica.

Vamos, então, estudar uma função - a função *ferradura de Smale* - definida num conjunto bidimensional, que tem várias analogias com a função quadrática $F_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$, definida em \mathbb{R} . A dinâmica simbólica, que desempenha um papel importante no entendimento do comportamento dinâmico desta função quadrática (cf., por exemplo, Ferreira (2002) e Ferreira e Ferreira (2003)), é também utilizada para estudar a função ferradura de Smale.

Sejam $Q = [0,1] \times [0,1]$ o quadrado unitário, A o semicírculo de raio 1 por baixo de Q , B o semicírculo de raio 1 acima de Q , e ponhamos $N = A \cup Q \cup B$ (ver Figura 2.1). Sejam H_j , para $j \in \{0,1\}$, duas faixas horizontais,

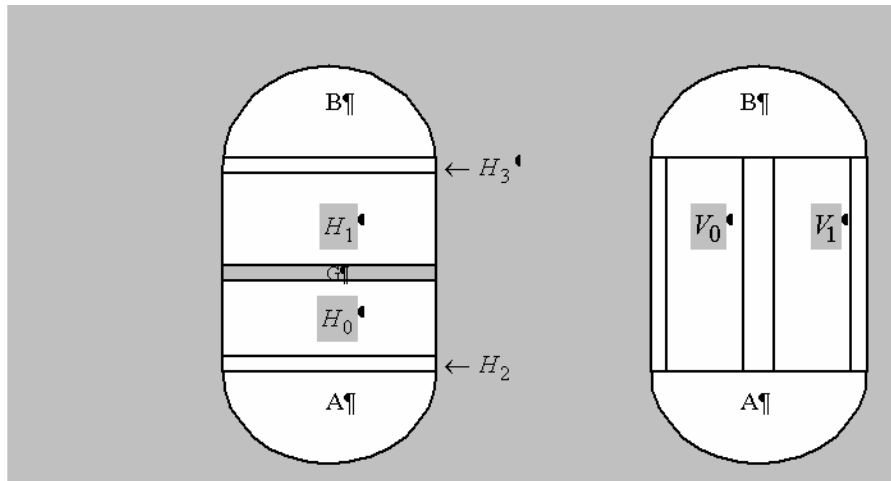
$$H_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y_1^j \leq y \leq y_2^j\}, \text{ com } 0 \leq y_1^0 < y_2^0 < y_1^1 < y_2^1 \leq 1,$$

e sejam V_j , para $j \in \{0,1\}$, duas faixas verticais,

$$V_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1^j \leq x < x_2^j, 0 \leq y \leq 1\}, \text{ com } 0 \leq x_1^0 \leq x_2^0 < x_1^1 < x_2^1 \leq 1.$$

Sejam G a faixa horizontal compreendida entre H_0 e H_1 , H_2 a faixa horizontal inferior em Q por baixo de H_0 , e H_3 a faixa horizontal superior em Q por cima de H_1 (ver Figura 2.1).

Figura 2.1: Faixas horizontais e verticais em Q .



A função ferradura de Smale f envia a região N dentro de si própria, ou seja, efectua uma transformação de N em N como passamos a descrever. Primeiro, contrai linearmente o quadrado Q na direcção horizontal por um factor $\delta < \frac{1}{2}$ e expande-o na direcção vertical por um factor $\frac{1}{\delta}$, como é mostrado na Figura 2.2(b). Obtemos um rectângulo que é dobrado na forma de \cap (“ferradura”) e colocado sobre o quadrado original (Figura 2.2(c)). Além disso, consideramos f de forma que $f(G) \subset B$, a imagem de $H_2 \cup H_3$ esteja contida em A , que f seja uma contracção de A e também de forma que $f(A), f(B) \subset A$. Assim, nestas condições, a função ferradura de Smale f transforma a região N dentro de si própria, como pretendíamos (Figura 2.3(a)).

Figura 2.2: Construção da ferradura de Smale.

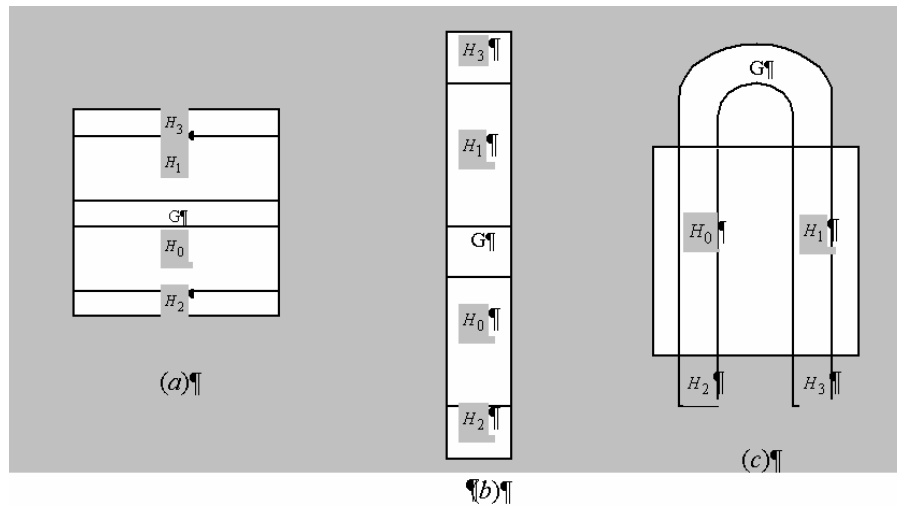
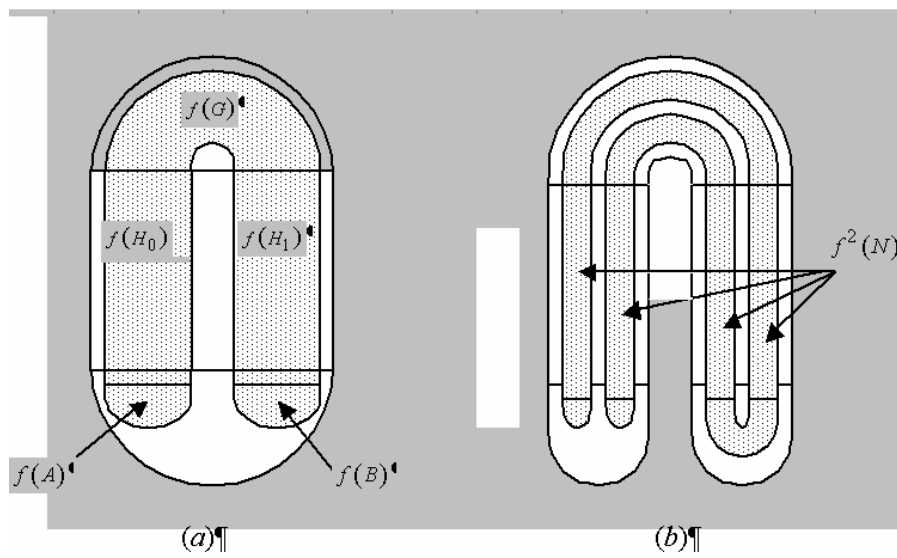


Figura 2.3: Primeira e segunda iteradas da função ferradura de Smale.



Observemos que $f(N) \subset N$ e que f é injectiva. Contudo, como f não é sobrejectiva, f^{-1} não está globalmente definida. Com vista à descrição da dinâmica de f em N , notemos que a pré-imagem de $Q \cap f^{-1}(Q)$ consiste nos dois rectângulos horizontais H_0 e H_1 , que podemos assumir, sem qualquer perda de generalidade, serem transformados sobrejectiva e linearmente nas componentes verticais V_0 e V_1 , pois $f(H_j) = V_j$, para $j \in \{0,1\}$. A largura de V_0 e de V_1 é δ , tal como é a altura de H_0 e de H_1 . Pela linearidade de $f|_{H_0}: H_0 \rightarrow V_0$ e $f|_{H_1}: H_1 \rightarrow V_1$, resulta que $f|_Q$ envia linhas verticais em linhas verticais e linhas horizontais em linhas horizontais. (Notemos que, se H for um segmento horizontal em Q cuja imagem também esteja em Q , então o comprimento de $f(H)$ é o produto de δ pelo comprimento de H ; analogamente, se V e $f(V)$ forem segmentos verticais em Q , então o comprimento de $f(V)$ é o produto de $\frac{1}{\delta}$ pelo comprimento de V).

O comportamento dinâmico da função f é muito semelhante ao da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Começemos por notar que, dado que f é uma contracção em A , f tem um único ponto fixo p em A , e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(q) = p$, para todo o $q \in A$, em virtude do Teorema da Contracção (cf. Devaney (1989)). Como $f(B) \subset A$, o mesmo comportamento se verifica para todas as órbitas progressivas em B . Analogamente, se $q \in Q$ mas $f^k(q) \notin Q$, para algum $k > 0$, então $f^k(q) \in A \cup B$, e, portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(q) = p$. Deste modo, para entendermos as órbitas progressivas de f , basta-nos considerar o conjunto dos pontos cujas órbitas progressivas permaneçam em Q . O estudo que faremos vai, contudo, mais além, pois iremos descrever o conjunto

$$\Lambda = \left\{ q \in Q : f^k(q) \in Q, \text{ para todo o } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Quer dizer, vamos analisar o comportamento recorrente desta função. Para isso é necessário identificar a *conjunto invariante* Λ , isto é, um conjunto $\Lambda \subset Q$ tal que $f(\Lambda)$ é idêntico ao próprio Λ . Isto pode ser feito recursivamente. Começemos por observar que, de $f(N) \subset N$ resulta que $f^2(N) \subset f(N) \subset N$. Notemos que

$f^2(N)$ se obtém da seguinte forma: primeiro, a região $f(N)$ é contraída horizontalmente e expandida verticalmente, obtendo-se uma versão de $f(N)$ mais longa e estreita, igualmente com duas faixas verticais; a seguir, dobra-se a meio e coloca-se a região obtida dentro de $f(N)$, como mostra a Figura 2.3(b). Assim, $f^2(N) \cap Q$ consiste em quatro faixas verticais de largura δ^2 . Um procedimento análogo permite-nos concluir que $f^3(N) \cap Q$ consiste em oito faixas verticais de largura δ^3 . Prosseguindo esta construção indutiva, obtemos que o conjunto

$$\Lambda_- = \{q \in Q : f^{-k}(q) \in Q, \text{ para } k=1,2,3,\dots\}$$

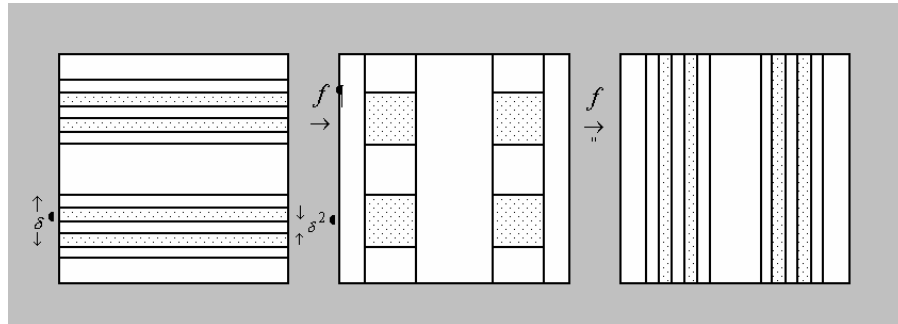
é o produto cartesiano, $C_1 \times [0,1]$, de um conjunto de Cantor por um intervalo vertical, ou seja, é um conjunto de Cantor de segmentos verticais.

Observemos, agora, que, uma vez que f contrai horizontalmente e expande verticalmente, o conjunto $f^{-1}(N) \cap Q$ é a união, $H_0 \cup H_1$, de duas faixas horizontais de altura δ ; $f^{-2}(N) \cap Q$ consiste em quatro faixas horizontais de altura δ^2 ; etc. (ver Figura 2.4). Deste modo, e como anteriormente, o conjunto

$$\Lambda_+ = \{q \in Q : f^k(q) \in Q, \text{ para } k=1,2,3,\dots\}$$

é o produto cartesiano, $[0,1] \times C_2$, de um intervalo horizontal por um conjunto de Cantor, ou seja, é um conjunto de Cantor de segmentos horizontais.

Figura 2.4: Faixas horizontais e verticais resultantes das primeiras duas iterações progressivas e regressivas de f .



Finalmente, intersectando estes dois conjuntos, obtemos que

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_- .$$

Logo, o conjunto invariante em Q é Λ , pois qualquer ponto em Λ_+ ou Λ_- é transportado por f para um outro ponto que está também em Λ . Assim, o conjunto Λ é constituído pelos pontos em Q que, após aplicações repetidas (em número infinito) da função f , podem exibir um comportamento recorrente ou não-errante. Os pontos de Q que não estão em Λ devem eventualmente cair fora de Q sob qualquer tipo de iteração de f . Um aspecto aproximado do conjunto invariante Λ é o da Figura 2.5. A intersecção dos dois conjuntos em termos de conjuntos de Cantor é também dada por

$$\Lambda = C_1 \times C_2 .$$

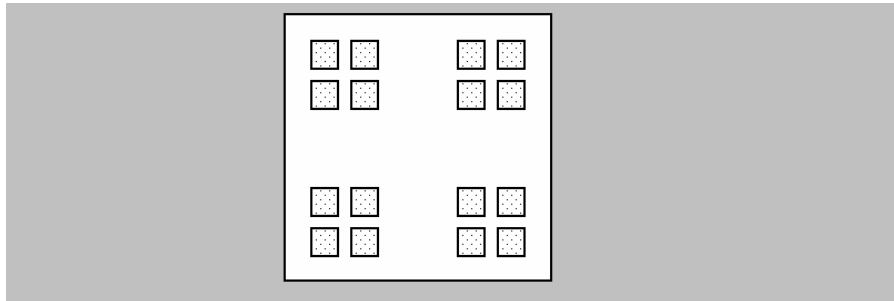
Vejamos que Λ é também um conjunto de Cantor: (i) Λ é um conjunto perfeito, pois ambos os conjuntos C_1 e C_2 são perfeitos; (ii) Observando que o

conjunto $Q_{-n+1}^n = \bigcap_{k=-n+1}^n f^k(Q)$ é a união disjunta de 2^{2n} quadrados de lado δ^n , e ainda que

$$\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(Q) ,$$

concluimos que as componentes conexas do conjunto Λ são pontos. Logo, Λ satisfaz as três propriedades de um conjunto de Cantor¹. Existe, de facto, um homeomorfismo entre o conjunto de Cantor Λ para a função ferradura de Smale e o conjunto de Cantor análogo para a função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, como refere Robinson (1999).

Figura 2.5: Intersecção das faixas horizontais e verticais resultantes das primeiras duas iterações progressivas e regressivas de f .



¹ Um conjunto de Cantor é um conjunto compacto, totalmente desconexo e perfeito.

3. Dinâmica simbólica e ferradura de Smale

Para introduzirmos a dinâmica simbólica neste sistema, necessitamos considerar a função desvio σ definida no espaço de símbolos Σ_2 , formado por seqüências bi-infinitas, pois a determinação do conjunto de Cantor Λ envolve iteradas progressivas e regressivas da função ferradura de Smale f . O conjunto Σ_2 de seqüências binárias bi-infinitas é definido por

$$\Sigma_2 = \{s = (\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots) : s_i = 0 \vee s_i = 1, \text{ para } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Neste conjunto Σ_2 vamos definir uma função σ que permite a representação simbólica da função ferradura de Smale f e que fornece a correspondente dinâmica simbólica.

Definição 3.1: Chamamos *função desvio* à função $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definida por $\sigma(\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots) = (\dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \dots)$.

A função desvio $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ tem uma dinâmica bem determinada: o número de pontos periódicos de período n é 2^n , o conjunto das órbitas periódicas é denso em Σ_2 , e existe uma órbita densa em Σ_2 (cf. Robinson (1999)). No próximo teorema (Teorema 3.1) vamos demonstrar que $f|_\Lambda$ é topologicamente conjugada à função desvio σ definida em Σ_2 . A ideia é seguir a órbita de um ponto $q \in \Lambda$ e observar em que faixa horizontal H_i cai cada um dos seus iterados.

Recordemos que o conjunto $Q_{-n+1}^n = \bigcap_{k=-n+1}^n f^k(Q)$ é a união disjunta de 2^{2n} quadrados de lado δ^n . É claro que, quando n tende para $+\infty$, o número de quadrados cresce indefinidamente, os seus lados tendem para 0, e $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{-n+1}^n = \Lambda$. Os pontos do conjunto Λ são codificados a partir do facto de que cada quadrado de Q_{-n+1}^n pode ser univocamente representado por um bloco de símbolos $s^{(n)} = (s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1})$, com $s_i \in \{0, 1\}$, de comprimento $2n$. A cada faixa do conjunto $f^n(N) \cap Q$, com $n \in \mathbb{Z}$, fazemos corresponder um 0 ou um 1 de acordo com o procedimento que se segue. Consideremos as faixas horizontais H_0 e H_1 . Observemos que

$$f(N) \cap Q = f(H_0) \cup f(H_1),$$

onde $f(H_0) \cap f(H_1) = \emptyset$;

$$f^2(N) \cap Q = f^2(H_0) \cup f^2(H_1),$$

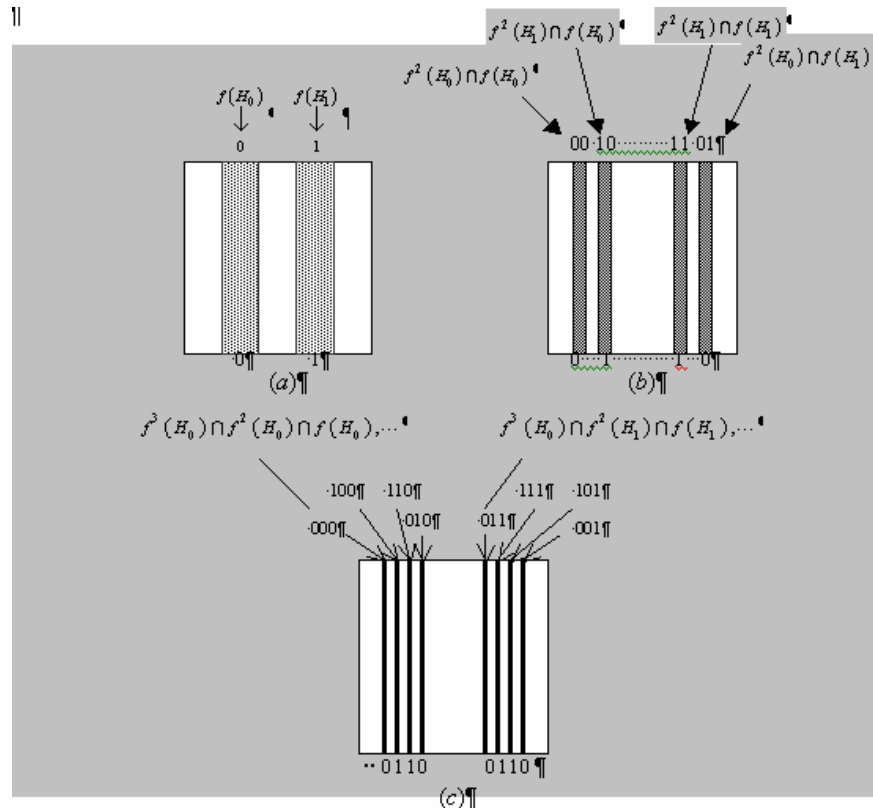
com $f^2(H_0) \cap f^2(H_1) = \emptyset$; em geral, para $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(N) \cap Q = f^n(H_0) \cup f^n(H_1)$$

com $f^n(H_0) \cap f^n(H_1) = \emptyset$, em virtude de $H_0 \cap H_1 = \emptyset$ e f ser um difeomorfismo. Deste modo, uma faixa vertical do conjunto $f^n(N) \cap Q$ está contida em $f^n(H_0)$ ou em $f^n(H_1)$. No primeiro caso, atribuímos-lhe o símbolo 0; no segundo caso, atribuímos-lhe o símbolo 1. Notemos que estes símbolos isoladamente não fornecem uma descrição única de cada faixa vertical de $f^n(N) \cap Q$, para $n \geq 2$. Contudo, podem ser utilizados de modo a obtermos uma descrição única. Por exemplo, duas faixas de $f^2(N) \cap Q$ têm o símbolo 0, mas são diferenciadas pelo facto de uma estar em $f(H_0)$ (isto é, faixa 0 de $f(N) \cap Q$) e a outra estar em $f(H_1)$ (isto é, faixa 1 de $f(N) \cap Q$). Assim, as faixas em $f^2(N) \cap Q$ são descritas univocamente por dois símbolos: o da direita especificando a faixa em $f(N) \cap Q$, de modo que o da esquerda determina univocamente a faixa em $f^2(N) \cap Q$ (ver Figura 3.1).

Figura 3.1. Codificação das faixas em $f^i(N) \cap Q$, para:

(a) $i = 1$, (b) $i = 2$; (c) $i = 3$.

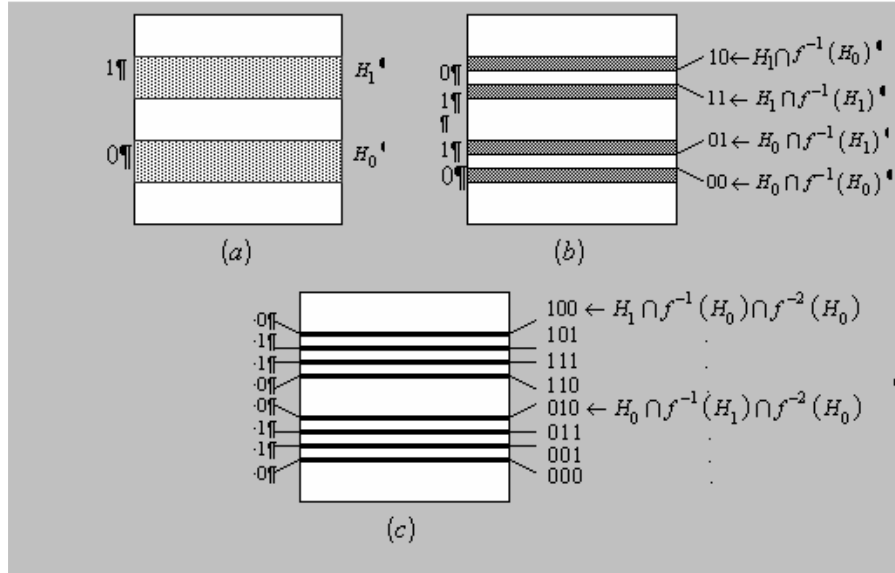


Analogamente, as faixas de $f^3(N) \cap Q$ ficam univocamente codificadas, começando pelos códigos das faixas de $f^2(N) \cap Q$ e juntando-lhe à esquerda o símbolo correspondente a $f^3(N) \cap Q$. Continuando este processo indutivo, resulta que as faixas de $f^n(N) \cap Q$ são univocamente determinadas por um bloco de n símbolos do conjunto $\{0,1\}$.

Argumentos análogos podem ser utilizados para codificarmos as faixas horizontais de $f^{-n}(N) \cap Q$, com $n \in \mathbb{N}$, considerando as imagens de H_0 e H_1 pela função f^{-1} . A cada faixa horizontal de $f^{-n}(N) \cap Q$, com $n \in \mathbb{N}$, atribuímos o símbolo i , se estiver contida em $f^{-n}(H_i)$, com $i \in \{0,1\}$. Assim, para $n \in \mathbb{N}$,

cada faixa de $f^{-n}(N) \cap Q$ fica univocamente codificada, juntando o seu símbolo à direita do código da faixa de $f^{-(n-1)}(N) \cap Q$ que a contém (ver Figura 3.2).

Figura 3.2. Codificação das faixas em $f^{-i}(N) \cap Q$, para:
 (a) $i = 0$, (b) $i = 1$; (c) $i = 2$.



Finalmente, a codificação dos quadrados de Q_{-n+1}^n é feita, agora, de forma muito natural. Cada um desses quadrados é a intersecção de uma das faixas horizontais de $f^{-(n-1)}(N) \cap Q$ com uma das faixas verticais de $f^n(N) \cap Q$. Se a faixa horizontal tiver código $(s_0 s_1 \dots s_{n-1})$ e a faixa vertical tiver código $(s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1})$, então codificamos o quadrado por $(s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1})$. Assim, por exemplo, $(01 \cdot 10)$ e $(00 \cdot 00)$ representam, respectivamente, os quadrados superior direito e inferior esquerdo de Q_{-1}^2 apresentados na Figura 3.3.

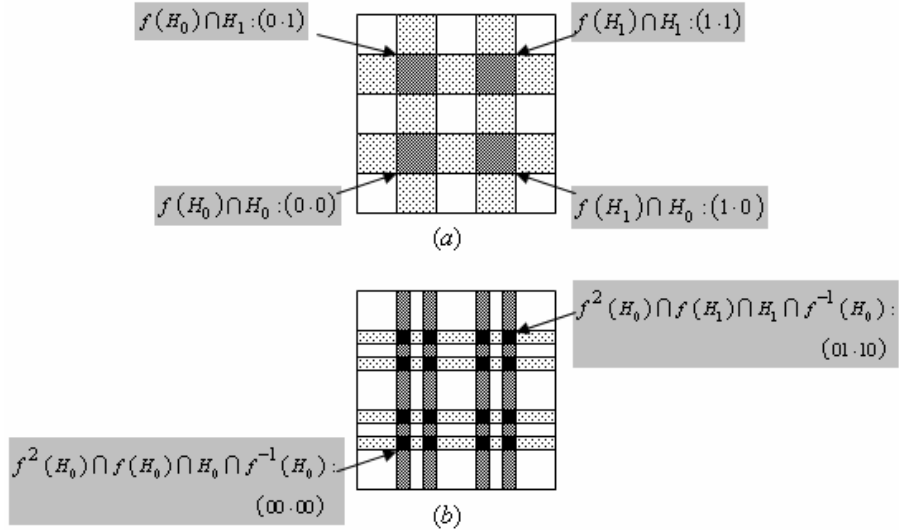
No limite, quando n tende para $+\infty$, a codificação anterior faz corresponder uma sequência binária bi-infinita a cada ponto de Λ . Deste modo, a função $h: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ definida por

$$h(q) = (\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots),$$

onde $s_j = k$, se, e só se, $f^j(q) \in H_k$, fornece o itinerário do ponto $q \in \Lambda$.

Figura 3.3: Ilustração dos quadrados:

(a) $Q_0^1 = Q \cap f(Q)$; (b) $Q_{-1}^2 = f^2(Q) \cap f(Q) \cap Q \cap f^{-1}(Q)$



Teorema 3.1: Seja $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ a função desvio definida no espaço Σ_2 de símbolos formado por sequências binárias bi-infinitas. A função $h: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ definida acima é uma conjugação topológica entre as funções $f|_\Lambda$ e σ .

Demonstração: Começemos por verificar que $\sigma \circ h = h \circ f|_\Lambda$. Consideremos um ponto $q \in \Lambda$, e ponhamos $s = h(q)$ e $t = h(f(q))$. Deste modo, $f^{j+1}(q) \in H_{s_{j+1}}$ e $f^{j+1}(q) = f^j(f(q)) \in H_{t_j}$. Assim, $s_{j+1} = t_j$ e, portanto, $\sigma(s) = t$, isto é, $\sigma(h(q)) = h(f(q))$.

Vejam, agora, que h é contínua. Consideremos a vizinhança

$$N = \{t : t_j = s_j, \text{ para } j \in \{-n_0, \dots, n_0\}\}$$

de $s = h(q)$. Para n_0 fixo, a continuidade de f garante que existe um $\delta > 0$ tal que, para $p \in \Lambda$ com $|p - q| \leq \delta$, $f^j(p) \in H_{s_j}$, para $j \in \{-n_0, \dots, n_0\}$. Assim, se $t = h(p)$ e $|p - q| \leq \delta$, então $t \in N$, o que prova a continuidade de h .

Para concluirmos que h é sobrejectiva, comecemos por provar, por indução, que o conjunto $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s-j})$ é uma faixa vertical com largura δ^n , para qualquer $s \in \Sigma_2$. Seja, então, $s \in \Sigma_2$. Para $n = 1$, aquele conjunto é $f(H_{s-1}) = V_{s-1}$, que é uma faixa vertical de largura δ . Como

$$\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s-j}) = f\left(\bigcap_{j=2}^n f^{j-1}(H_{s-j})\right) \cap f(H_{s-1})$$

e, por hipótese de indução, $\bigcap_{j=2}^n f^{j-1}(H_{s-j})$ é uma faixa vertical de comprimento δ^{n-1} , resulta que $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s-j})$ é uma faixa vertical de comprimento δ^n . Fazendo n tender para $+\infty$, concluímos que $\bigcap_{j=1}^{+\infty} f^j(H_{s-j})$ é

um segmento de recta vertical. Analogamente, $\bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{s-j})$ é um segmento de recta horizontal, e o conjunto $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} f^j(H_{s-j})$ é formado apenas por um ponto, q .

Em particular, esse conjunto é não-vazio. Para esse ponto q , resulta que $h(q) = s$, e, portanto, h é sobrejectiva. Por último, mostremos que h é injectiva. Suponhamos que $h(p) = h(q) = s$. Para qualquer j , temos que $f^{-j}(p), f^{-j}(q) \in H_{s-j}$, pelo que $p, q \in f^j(H_{s-j})$. Como j é qualquer, resulta que $p, q \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} f^j(H_{s-j})$, e, portanto, p e q estão no mesmo segmento de recta vertical; resulta também que $p, q \in \bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{s-j})$, e, portanto, p e q estão no mesmo segmento de recta

horizontal. Assim, e porque o conjunto $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} f^j(H_{S_{-j}})$ é um conjunto singular, concluímos que $p = q$, o que termina a demonstração.

Robinson (1999)

A função desvio $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é, assim, o modelo para a restrição de f ao conjunto Λ . Como a função $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é uma função caótica, resulta que também $f|_{\Lambda}$ é uma função caótica.

A utilização da Dinâmica Simbólica permitiu a Smale demonstrar algumas propriedades relevantes do comportamento recorrente de Λ . Assim,

1. Existe um conjunto infinito numerável de pontos em Λ com *órbitas periódicas*. Com efeito, um ponto x em Λ tem uma órbita periódica, se alguma iterada da função ferradura de Smale satisfizer $f^n(x) = x$.

Obviamente, x é periódico, se a sua sequência simbólica for periódica:

$a_i = a_{i+n}$, para todo o valor de i . Para cada valor de n , existem 2^n sequências bi-infinitas diferentes que são periódicas com período n (ou um divisor de n). Cada uma dessas sequências identifica um ponto periódico em Λ .

2. Existe um conjunto infinito não-numerável de pontos em Λ que *não são periódicos*: são aqueles cujas sequências simbólicas não são periódicas.
3. Existe *pelo menos um* ponto em Λ cuja órbita é *arbitrariamente próxima* de qualquer ponto em Λ , o que significa que uma iterada de valor suficientemente elevado da função ferradura de Smale fica próxima de qualquer ponto em Λ (cf. Smale (1963) e Smale (1980)).

Uma consequência importante da Propriedade 3 é que o conjunto invariante Λ não pode ser desdobrado em duas ou mais partes separadas, porque pelo menos um ponto pode eventualmente aproximar-se de qualquer outro ponto de Λ . Assim, o conjunto invariante Λ da ferradura de Smale ajusta-se à noção de conjunto ligado por estados recorrentes, ou um certo tipo básico de movimento caótico, pois a órbita construída em 3 é densa.

Finalmente, Smale mostrou que todas as propriedades acima mencionadas se verificam, mesmo que a ferradura de Smale seja distorcida por uma perturbação de valor pequeno, embora de forma arbitrária. Quer dizer, o comportamento recorrente da função ferradura de Smale é *estruturalmente estável*.

Agradecimentos: Agradecemos ao Alberto Pinto e ao António Pascoal as discussões de ideias, úteis no desenvolvimento deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- Cartwright, M. L. and Littlewood, J. E. (1945) On Non-Linear Differential Equations of the Second Order, *J. London Math. Soc.* **20**, 180-189.
- Ferreira, F. A. (2002) *Dinâmica não linear: Atratores*. Dissertação de Mestrado, Universidade Portucalense: Porto, Portugal.
- Ferreira, F. A. and Ferreira, F. (2003) Dinâmica Simbólica: um auxílio precioso, *Lusiada, Revista de Ciência e Cultura: Série de Matemática* **1**, 35-58.
- Gleick, J. (1994) *Caos: A Construção de Uma Nova Ciência*. Gradiva: Lisboa.
- Levinson, N. (1949) Determination of the Potential from the Asymptotic Phase, *Physical Review* **75**, 1445-1445.
- van der Pol, B. and van der Mark, J. (1927), Frequency demultiplication, *Nature* **120**, 363-364.
- Rayleigh, J. W. S. (1896) Theoretical considerations respecting the separation of gases by diffusion and similar processes, *Philosophical Magazine and Journal of Science* **42**, 493-498.
- Robinson, C. (1999) *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press LLC: New York.
- Smale, S. (1963) Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Ann. Scuola Normale Pisa* **18**, 97-116.
- Smale, S. (1980) *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- Stewart, I. (2000) *Deus Joga aos Dados? Ciência Aberta*. Gradiva: Lisboa.
- [1] <http://www.led.ufba.br/calculo3/turbulencia/dinamico.htm> (consultado em 04-06-2002).
- [2] <http://www.uol.com.br/cienciahoje/ch/ch156.htm> (consultado em 04-06-2002).

Outra Bibliografia Consultada

- Arrowsmith, D. K. and Place, C. M. (1991) *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press: Cambridge.
- Broer H. W. and Dumortier F. (1991) *Genericity and Structural Stability*. North-Holland: Amsterdam.
- Devaney, R. L. (1989) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company: New York.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1997) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York.
- Hirsch, M. W. and Smale, S. (1974) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press: New York.
- Irwin, M. C. (1980) *Smooth Dynamical Systems*. Academic Press: New York.
- Palis, J. and de Melo, W. (1978) *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Editora Edgard Blucher, Ltda., São Paulo.
- Shub, M. (1987) *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.